Written strictly in accordance with the New Syllabus for Higher Secondary and Multipurpose Schools for Class IX

HIGHER SECONDARY
ELECTIVE MATHEMATICS
PART I

BY

SRI KESHAB CHANDRA NAG

Retired Headmaster Mitra Institution (Bhowanipur), Author of S. F. & H S Core Math Patiganit (VII, VIII), Modern Arithmetic (VII, VIII) in English, Core Ganit (IX-X), Studies in Core, Math. (English) Naba Patiganit (V, VI), S F Adhunik Ganit (IX-X), S F Addl Math , H S Elective Mathematics Parts II—III, & Helps to the Study of H S. Ele Math.

CALCUTTA BOOK HOUSE

1/1, Bankim Chatterjee Street, Calcutta-12

Published by
P. C. BHOWAL
1/1, Bankim Chatterjee Street
Calcutta-12.

May, 1958

Price Rupees 3·50 Only

MATHEMATICS

ELECTIVE SUBJECT

Course for Class IX

ALGEBRA :

The Remainder Theorem, Divisibility (factor theorem); Harder Factors, Laws of Indices (formal proofs for fractional and negative indices not being required) ; Surds ; Involutions and Evolutions , Simple Simultaneous Equations and problems with two or more variables , Quadratic Equations ; Graphical Solutions.

GEOMETRY :

To Prove :

In an obtuse-angled triangle, the square on the side subtending the obtuse angle is equal to the sum of the squares on the sides containing the obtuse angle together with twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it.

In every triangle the square on the side subtending an acute angle is equal to the sum of the squares on the sides containing that angle diminished by twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it.

If a straight line is drawn parallel to one side of a triangle, the other two sides are divided proportionally and the converse.

If two triangles are equiangular, their corresponding sides are proportional and the converse.

If two triangles have one angle of the one equal to one angle of the other and the sides about these equal angles proportional, the triangles are similar.

The internal bisector of an angle of a triangle divides the opposite side internally in the ratio of the sides containing the angle and likewise the external bisector externally.

If a perpendicular is drawn from the right angle of a right-angled triangle to the hypotenuse, the triangles on each side of the perpendicular are similar to the whole triangle and to one another.

The ratio of the areas of similar triangles is equal to the ratio of the squares on the corresponding sides.

TRIGONOMETRY :

Measurement of angles in degrees, minutes, seconds and in radians. Definition of trigonometrical ratios of an acute angle. Trigonometrical ratios of the standard angles—0°, 30°, 45°, 60°, 90°, (undefined values such as tan 90°, cot 0° to be excluded), Simple identities connecting the ratios of an angle immediately derivable from a right-angled triangle. Trigonometrical ratios of complementary angles.

Easy problems on heights and distances reducible to the solution of right-angled triangles involving the standard angles above.

CONTENTS (সূচীপত্র)

শুদ্ধিপত্র

Algebra :

46 উদা. 18 তে $xyz\sqrt{3600}$ স্থানে $xyz=\sqrt{3600}$ হইবে ,

60 ,, উদা. 11 তে সবশেষে $x-y$ স্থানে $y-x$ হইবে ,

104 ,, উদা. 6 এর প্রথম হবে $\sqrt{2}$ স্থানে $\sqrt{3}$ হইবে ,

106 ,, উদা. 13 তে $\sqrt{-13}$ স্থানে $\sqrt{3}-1$ হইবে ;

117 ,, উদা. 9 এ ভাজকে $\frac{b^4}{8a^3}$ এর আগে + স্থানে - হইবে ,

118 ,, শেষে $\left(x-\frac{1}{x}-2\right)$ স্থানে $\left(x-\frac{1}{x}-2\right)^2$ হইবে ,

158 ,, 6 লাইনে $=3$ স্থানে $=0$ হইবে ।

Geometry :

29 পৃষ্ঠায় 10 লাইনে প্রথমেই $\frac{AB}{DE}$ হইবে ,

48 ,, উদা. 4এ $\triangle ADE$ স্থানে $\triangle ADF$ হইবে ,

129 ,, 2(iii) অঙ্কের উত্তরে 5' স্থানে 5" হইবে ,

142 ,, 3 লাইনে AC স্থানে AD হইবে ।

ALGEBRA (বীজগণিত)

Involution (শক্তি-উন্নয়ন বা ঘাত নির্ণয়)

1. ঘাত বা শক্তি। কোন সংখ্যা বা রাশিকে এক বা একাধিক বার লইয়া গুণ করিলে যে গুণফল পাওয়া যায়, সেই গুণফলকে ঐ সংখ্যা বা রাশির ঘাত বা শক্তি (Power) বলে। যথা—

দৃষ্টান্ত (i) 3কে একবার লইলে গুণফল হয় 3 ; 3কে দুইবার লইয়া গুণ করিলে গুণফল হয় $3\times3=9$; 3কে যে দুইবার লওয়া হইয়াছে, উহা বুঝাইবার জন্য 3^2 লেখা যায়। অনুরূপে 3^3এর অর্থ $3\times3\times3=27$.

দৃষ্টান্ত (ii)

$$(a)^1=a$$
$$(a)^2=a\times a=a^2$$
$$(a)^3=a\times a\times a=a^3,\cdots$$

উপরের দৃষ্টান্তগুলি হইতে বুঝা গেল যে, কোন সংখ্যাকে একবার লইয়া গুণ করিলে গুণফল সেই সংখ্যাই হয়, সুতরাং কোন সংখ্যার প্রথম ঘাত সেই সংখ্যাটিই হয়। $(a)^2$ লেখা থাকিলে বুঝিতে হইবে a সংখ্যাটিকে দুইবার লইয়া গুণ করিতে অর্থাৎ উহার দ্বিঘাত নির্ণয় করিতে হইবে। অনুরূপে $(a)^3$ বলিলে aকে 3 বার লইয়া গুণফল বা a-র ত্রিঘাত নির্ণয় করিতে হইবে। যদি aকে n সংখ্যক বার লইয়া গুণ করা হয়, তবে সেই গুণফলকে a-র n-তম ঘাত বলে, $(a)^n=a\times a\times a\times\cdots\cdots n$ বার$=a^n$.

কোন সংখ্যা বা রাশির ঘাত বা শক্তি নির্ণয় করাকে উহার শক্তি-উন্নয়ন বা ঘাত নির্ণয় বা উদ্‌ঘাতন (Involution) বলে।

কোন সংখ্যা বা রাশিকে কয়বার লইয়া গুণ করিতে অর্থাৎ উহাকে [illegible] ঘাতে উন্নীত করিতে হইবে, তাহা যে সংখ্যা দ্বারা সূচিত হয়, তাহাকে [illegible] সূচক (Index) বলে। যথা, $(a)^3$ এর 3টিকে ঘাতের সূচক বলে। [illegible] চিহ্ন 1-কে লিখিতে হয় না, সুতরাং $a=(a)^1=a$.

$(a)^m$এর m-কে ঘাতের সূচক বুঝিবে।

কোন রাশিকে সূচকনির্দিষ্ট ঘাতে উন্নীত করিলে যে রাশিমালা পাওয়া যায় তাহাকে ঐ রাশির বিস্তৃতি (expansion) বলে।

2. **গুণফলের চিহ্ন-বিষয়ক নিয়ম** (Rule of signs) হইতে তোমরা জান যে,—

(i) যে কোন সংখ্যার যুগ্ম ঘাত (even power) ধনাত্মক (positive) হইবে। যথা,

$$(+x)^2 = x \times x = x^2,$$
$$(-x)^2 = -x \times -x = x^2,$$
$$(-a)^4 = -a \times -a \times -a \times -a = a^4, \text{ ইত্যাদি।}$$

আর (ii) ঘাতটি যদি অযুগ্ম (odd) হয়, তবে সংখ্যাটি ধনাত্মক হইলে ঘাতটি ধনাত্মক হইবে, এবং সংখ্যাটি ঋণাত্মক হইলে ঘাতটিও ঋণাত্মক হইবে। অতএব, অযুগ্ম ঘাতের চিহ্ন সংখ্যাটির চিহ্নবিশিষ্ট হইয়া থাকে। যথা,

$$(+3)^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27,$$
$$(-3a)^3 = -3a \times -3a \times -3a = -27a^3,$$
$$(-x)^5 = -x \times -x \times -x \times -x \times -x = -x^5, \text{ ইত্যাদি।}$$

3. **ঘাত নির্ণয়।** উপরের দৃষ্টান্তগুলি হইতে একপদীয় রাশির ঘাত নির্ণয়ের নিয়ম হইল :—

(i) প্রদত্ত পদের সহগটিকে নির্দিষ্ট ঘাতে উন্নীত করিয়া তাহার পূর্বে নিয়মানুসারে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্ন দিবে।

(ii) তারপর পদটির প্রত্যেক উৎপাদকের সূচককে যে ঘাতে উন্নীত করিতে হইবে তাহার সূচক দ্বারা গুণ করিয়া বসাইবে।

উদা. 1. $(2a^2)^4 = 2^4.(a^2)^4 = 16a^8,$

$$(-2a^3b)^2 = (-2)^2.(a^3)^2.(b)^2 = 4a^6b^2,$$
$$(-3x^2y^3)^3 = (-3)^3.(x^2)^3.(y^3)^3 = -27x^6y^9,$$
$$\left(\frac{2ab^2}{5x^2y^2}\right)^3 = \frac{8a^3b^6}{125x^6y^6}.$$

4. **রাশির ঘাত নির্ণয়।** গুণন প্রক্রিয়া হইতে দেখা যায় যে,

$$\left.\begin{array}{l}(a+b)^2=(a+b)\times(a+b)=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5\end{array}\right\}$$

উপরের দৃষ্টান্তগুলি হইতে দ্বিপদ রাশির ঘাত নির্ণয়ের জন্য নিম্নলিখিত নিয়ম করা যায়—

মনে কর, রাশির প্রথম পদ a এবং দ্বিতীয় পদ b দেওয়া আছে।

(i) দ্বিপদ রাশিকে কোন ঘাতে উন্নীত করিলে লব্ধরাশিমালার পদসংখ্যা উহার ঘাত-সূচক সংখ্যা অপেক্ষা এক বেশী হইবে। যথা, দ্বিঘাতের বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা 3, ত্রিঘাতের বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা 4, ইত্যাদি।

(ii) দ্বিপদ রাশিটির ঘাতে যে সূচক আছে, উহার প্রথম পদ aকে এবং দ্বিতীয় পদ b-কে সেই ঘাতবিশিষ্ট করিলে বিস্তৃতির যথাক্রমে প্রথম ও শেষ পদ হইবে। যথা, $(a+b)^5$এর বিস্তৃতির প্রথম পদ a^5 এবং শেষ পদ b^5.

(iii) বিস্তৃতির দ্বিতীয়, তৃতীয় প্রভৃতি অন্যান্য যে কোন পদে a-র ঘাত উহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের a-র ঘাত অপেক্ষা এক কম এবং b-র ঘাত পূর্ব পদটির b-র ঘাত অপেক্ষা এক বেশী হইবে।

(iv) বিস্তৃতির দ্বিতীয়, তৃতীয় প্রভৃতি যে কোন পদের সাংখ্য-সহগ নির্ণয়ের নিয়ম এই যে, যে পদের সহগ নির্ণয় করিতে হইবে তাহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের সহগের সহিত a-র ঘাতের সূচকের গুণফলকে পূর্বে যতগুলি পদ আছে সেই পদসংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে লব্ধ ভাগফল হইবে নির্ণেয় সহগ।

(v) $a+b$ এবং $a-b$ এইরূপ রাশিদ্বয়কে একই ঘাতে উন্নীত করিলে উহাদের দুইটি বিস্তৃতির পার্থক্য এই হয় যে, প্রথম বিস্তৃতির সব পদই ধনাত্মক হয়, কিন্তু দ্বিতীয় বিস্তৃতির প্রথম পদ ধনাত্মক, দ্বিতীয় পদ ঋণাত্মক। এইরূপ

একান্তরভাবে পদগুলি ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হইয়া থাকে। পূর্ব পৃষ্ঠার দৃষ্টান্তগুলি দেখ।

(vi) যে কোন বিস্তৃতিতে প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সাংখ্য-সহগ দুইটি সমান হয়।

নিম্নের উদাহরণগুলিতে পূর্বোক্ত নিয়মগুলি মিলাইয়া লও।

উদাহরণমালা 1

উদা. 1. Expand $(a+b)^6$.

এখানে ঘাতের সূচক 6, সুতরাং বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা হইবে 7, বিস্তৃতির প্রথম পদ হইবে a^6.

উহার দ্বিতীয় পদের সহগ নির্ণয়ের জন্য প্রথমে পূর্বপদ a^6-এর সূচক 6 ও সহগ 1-এর গুণফল 6কে পূর্বে 1টি পদ থাকায় 1 দ্বারা ভাগ করিয়া হইল 6.

সুতরাং দ্বিতীয় পদের সাংখ্য-সহগ 6 হইবে। অতএব, বিস্তৃতির দ্বিতীয় পদ হইবে $6a^5b$. অনুরূপে,

তৃতীয় পদ হইবে $\frac{6\times5}{2}a^4b^2=15a^4b^2$

[আগে 2টি পদ থাকায় 2 দিয়া ভাগ হইল]

চতুর্থ পদ$=\frac{15\times4}{3}a^3b^3=20a^3b^3$

[আগে 3টি পদ থাকায় 3 দিয়া ভাগ হইল]

পঞ্চম পদ$=\frac{20\times3}{4}a^2b^4=15a^2b^4$

ষষ্ঠ পদ$=\frac{15\times2}{5}ab^5=6ab^5$

সপ্তম বা শেষ পদ$=\frac{6\times1}{6}b^6=b^6$.

$\therefore\ (a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$.

[দ্রষ্টব্য : পূর্বে বলা হইয়াছে যে, কোন বিস্তৃতিতে প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সাংখ্য-সহগ দুইটি সমান হয়। উপরের উদাহরণে চতুর্থ পদের পূর্বে 3টি পদ হইয়াছে এবং উহার পরে 3টি পদ হইবে; সুতরাং চতুর্থ পদটি নির্ণয় করার পর ইহার পরবর্তী পদ তিনটি সহজেই উক্ত নিয়মানুসারে নির্ণয় করা যায়। এখানে পঞ্চম পদের সহগ আর কষিয়া নির্ণয় না করিয়া সহজেই ধরা যায় যে উহার সাংখ্য-সহগ তৃতীয় পদের সাংখ্য-সহগের সমান হইবে।]

উদা. 2. $(x-y)^7$এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

এখানে বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা = 8.

অতএব, বিস্তৃতির প্রথম পদ $= x^7$

দ্বিতীয় পদ $= -\frac{7\times1}{1}x^6y = -7x^6y$

তৃতীয় পদ $= \frac{7\times6}{2}x^5y^2 = 21x^5y^2$

চতুর্থ পদ $= -\frac{21\times5}{3}x^4y^3 = -35x^4y^3$

পঞ্চম পদ $= \frac{35\times4}{4}x^3y^4 = 35x^3y^4$

ষষ্ঠ পদ $= -\frac{35\times3}{5}x^2y^5 = -21x^2y^5$

সপ্তম পদ $= \frac{21\times2}{6}xy^6 = 7xy^6$

শেষ পদ $= -\frac{7\times1}{7}y^7 = -y^7$

$$\therefore\ (x-y)^7 = x^7 - 7x^6y + 21x^5y^2 - 35x^4y^3 + 35x^3y^4 - 21x^2y^5 + 7xy^6 - y^7.$$

উদা. 3. $(2a+b)^5$এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

এখানে বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা হইবে 6.

বিস্তৃতির প্রথম পদ $= (2a)^5 = 32a^5$

দ্বিতীয় পদ $= 5.(2a)^4b = 80a^4b$

তৃতীয় পদ $= \frac{5\times4}{2}(2a)^3b^2 = 80a^3b^2$

চতুর্থ পদ $= \frac{10\times3}{3}(2a)^2b^3 = 40a^2b^3$

পঞ্চম পদ $= \frac{10\times2}{4}(2a)b^4 = 10ab^4$

ষষ্ঠ পদ বা শেষ পদ $= \frac{5\times1}{5}b^5 = b^5$

$$\therefore\ (2a+b)^5 = 32a^5 + 80a^4b + 80a^3b^2 + 40a^2b^3 + 10ab^4 + b^5.$$

উদা. 4. $(1-x)^6$এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

এখানে বিস্তৃতিতে মোট 7টি পদ থাকিবে।

বিস্তৃতির প্রথম পদ $= (1)^6 = 1$

দ্বিতীয় পদ $= -6(1)^5.x = -6x$

তৃতীয় পদ $= \frac{6\times5}{2}(1)^4.x^2 = 15x^2$

চতুর্থ পদ $= -\frac{15\times4}{3}(1)^3.x^3 = -20x^3$

এখানে পরবর্তী তিনটি পদের সাংখ্য-সহগ হইবে যথাক্রমে তৃতীয়, দ্বিতীয় প্রথম পদের সাংখ্য-সহগের সমান।

$\therefore$ পরবর্তী পদত্রয় হইবে $15x^4$, $-6x^5$ এবং x^6.

$\therefore$ $(1-x)^6=1-6x+15x^2-20x^3+15x^4-6x^5+x^6$.

উদা 5. $(x^2-2)^4$এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

$$(x^2-2)^4=(x^2)^4-\tfrac{4\times 1}{1}(x^2)^3\,2+\tfrac{4\times 3}{2}(x^2)^2.(2)^2$$
$$-\tfrac{6\times 2}{3}(x^2).(2)^3+\tfrac{4\times 1}{4}(2)^4$$
$$=x^8-8x^6+24x^4-32x^2+16.$$

উদা. 6. $(2a-3b)^5$এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

এখানে বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা $=6$

বিস্তৃতির প্রথম পদ $=(2a)^5=32a^5$

দ্বিতীয় পদ $=-5(2a)^4(3b)=-240a^4b$

তৃতীয় পদ $=\frac{5\times 4}{2}(2a)^3(3b)^2=10(2a)^3(3b)^2=720a^3b^2$

চতুর্থ পদ $=-10(2a)^2(3b)^3=-1080a^2b^3$

পঞ্চম পদ $=5(2a)(3b)^4=810ab^4$

শেষ পদ $=-(3b)^5=-243b^5$

$$\therefore\ (2a-3b)^5=32a^5-240a^4b+720a^3b^2-1080a^2b^3$$
$$+810ab^4-243b^5.$$

[**দ্রষ্টব্য:** বিস্তৃতির প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদগুলির সাংখ্য-সহগ সমান হয় বলিয়া উপরের উদাহরণে প্রথম তিনটি পদের সাংখ্য-সহগ দেখিয়া চতুর্থ, পঞ্চম ও ষষ্ঠ পদের সাংখ্য-সহগ লেখা হইয়াছে।]

উদা. 7. $(a+b)^5-(a-b)^5$কে সরল কর।

প্রদত্ত রাশি $=(a^5+5a^4b+\frac{5\times 4}{2}a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5)$
$$-(a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5)$$
$$=10a^4b+20a^2b^3+2b^5.$$

উদা. 8. $a=3$ হইলে, $a^6-6a^5+15a^4-20a^3+15a^2-6a-63$এর মান কত হইবে?

প্রদত্ত রাশি $=(a^6-6a^5+15a^4-20a^3+15a^2-6a+1)-64$
$$=(a-1)^6-64=(3-1)^6-64$$
$$=(2)^6-64=64-64=0.$$

[এখানে পর পর পদগুলির সাংখ্য-সহগ দেখিয়া স্থির করা যায় যে প্রথম ছয় পদের সহিত সপ্তম পদ 1 লইলে 7টি পদ মিলিয়া $(a-1)^6$এর বিস্তৃতির সমান হইবে। $\therefore \quad -63=1-64$ এইরূপ ধরা হইয়াছে।]

উদা. 9. $a=\sqrt{3}-2$ হইলে $a^4+8a^3+24a^2+32a+18$এর মান নির্ণয় কর।

$$\text{প্রদত্ত রাশি} =(a)^4+4.a^3.2+6\,a^2(2)^2+4.a.(2)^3+(2)^4+2$$
$$=(a+2)^4+2=(\sqrt{3}-2+2)^4+2=(\sqrt{3})^4+2$$
$$=(3)^2+2=9+2=11.$$

উদা. 10. $(x+y)^5$এর বিস্তৃতিতে সাংখ্য-সহগগুলির সমষ্টি কত ?

বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা $=6$

$$\because \quad (x+y)^5=x^5+5x^4y+\tfrac{5\times4}{2}x^3y^2+\tfrac{10\times3}{3}x^2y^3+\tfrac{10\times2}{4}xy^4+y^5,$$

$\therefore$ পদগুলির সাংখ্য-সহগসমূহের যোগফল

$$=1+5+10+10+5+1=32.$$

[অন্য প্রণালী পরিশিষ্টে দেখ]

উদা. 11. $(a+b+2)^4$এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

$$(a+b+2)^4=\{(a+b)+2\}^4$$
$$=(a+b)^4+4(a+b)^3.2+6(a+b)^2.2^2+4(a+b).2^3+(2)^4$$
$$=(a+b)^4+8(a+b)^3+24(a+b)^2+32(a+b)+16$$
$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4+8(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$$
$$+24(a^2+2ab+b^2)+32a+32b+16$$
$$=a^4+4a^3b+8a^3+6a^2b^2+24a^2b+24a^2+4ab^3+24ab^2$$
$$+48ab+24b^2+8b^3+b^4+32a+32b+16.$$

Exercise 1

Raise to the required power :—

1. (i) $(-2a^3b^2)^5$ (ii) $(-3x^2y^3)^6$

(iii) $\left(-\dfrac{ab^3}{2x^2y}\right)^5$ (iv) $(a+b)^5$

Expand :—

2. $(a+1)^6$ **3.** $(x+y)^7$ **4.** $(1+2a)^4$ **5.** $(a-2)^5$

6. $(x-y)^5$ **7.** $(x-1)^6$ **8.** $(2a-1)^5$

9. $(3-c)^6$ **10.** $(2a+b)^5$ **11.** $(2x-3y)^5$

12. $(3a+2b)^5$ **13.** $(a+1)^8$ **14.** $(x-1)^9$

15. $(a^2+1)^6$ **16.** $(x^2+1)^5$ **17.** $(a^2-b^2)^4$

18. $(1-a^2)^6$ **19.** $(x-y+z)^3$ **20.** $(a+b-2)^4$.

Find the sum of the numerical coefficients of the terms in the following expansions :—

21. $(a+b)^6$ **22.** $(x+y)^5$ **23.** $(x+b)^7$ **24.** $(a+b)^8$

24 (*a*). $(2a-3b)^7$ [পরিশিষ্ট দেখ]

Find the value of :—

25. $a^6+6a^5+15a^4+20a^3+15a^2+6a-31$, when $a=-3$.

26. $x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x$, when $x=2$.

27. $x^4-12x^3+54x^2-108x+81$, when $x=3$.

28. $16a^4+32a^3+24a^2+8a-80$, when $a=-2$.

29. $x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$, if $x=2$, $y=-1$.

30. $x^4-4x^3+6x^2-4x-2$, when $x=\sqrt{2}+1$.

31. $a^6+6a^5+15a^4+20a^3+15a^2+6a$, when $a=\sqrt[3]{3}-1$.

Simplify :—

32. $(x+y)^5-(x-y)^5$ **33.** $(1+x)^6-(x-1)^6$

34. $(a+b)^7+(a-b)^7$ **35.** $(x+a)^6-(x-a)^6$.

Harder Factors (উৎপাদক নির্ণয়)

উদাহরণমালা 2

5. a^2-b^2 আকারবিশিষ্ট রাশির উৎপাদক নির্ণয়।

উদা. 1. Factorize a^4+4b^4. [C. U. 1922]

[দ্রষ্টব্য : এখানে অঙ্কটিতে a^4 একটি পূর্ণবর্গ, কারণ উহা $(a^2)^2$ এবং $4b^4$ একটি পূর্ণবর্গ, কারণ উহা $(2b^2)^2$, কিন্তু মধ্যের চিহ্নটি +, সুতরাং ইহা a^2-b^2 এর আকারে নাই। এখন দেখ, কি ভাবে দুই পাশে পূর্ণবর্গ সংখ্যা এবং মধ্যে '–' চিহ্ন দিয়া অঙ্কটিকে সাজান হইল।]

প্রদত্ত রাশি $=(a^2)^2+(2b^2)^2+2\,a^2.2b^2-4a^2b^2$
$=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$.

উদা. 2. Factorize a^8+a^4+1.

প্রদত্ত রাশি $=(a^4)^2+2a^4.1+(1)^2-a^4=(a^4+1)^2-(a^2)^2$
$=(a^4+a^2+1)(a^4-a^2+1)=\{(a^2)^2+2.a^2.1+(1)^2-a^2\}$
$\times(a^4-a^2+1)=\{(a^2+1)^2-(a)^2\}(a^4-a^2+1)$
$=(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)$.

উদা. 3. Factorize $a^4-23a^2b^2+b^4$.

প্রদত্ত রাশি $=(a^2)^2+2.a^2.b^2+(b^2)^2-25a^2b^2$
$=(a^2+b^2)^2-(5ab)^2=(a^2+5ab+b^2)(a^2-5ab+b^2)$.

উদা. 4. Factorize $4a^2+b^2-c^2-d^2+4ab+2cd$.

[D. B. 1923]

প্রদত্ত রাশি $=(4a^2+b^2+4ab)-(c^2+d^2-2cd)$
$=(2a+b)^2-(c-d)^2=(2a+b+c-d)(2a+b-c+d)$.

উদা. 5. Factorize $(a^2-b^2)(x^2-y^2)+4abxy$.

[P. U. '25, '33]

প্রদত্ত রাশি $=a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2+2abxy+2abxy$
$=(a^2x^2+b^2y^2+2abxy)-(a^2y^2+b^2x^2-2abxy)$
$=(ax+by)^2-(ay-bx)^2$
$=(ax+by+ay-bx)(ax+by-ay+bx)$.

উদা. 6. Factorize $a^2-b^2-c^2-2bc+a-b-c$.

প্রদত্ত রাশি $=a^2-(b^2+c^2+2bc)+a-b-c$

$=(a)^2-(b+c)^2+(a-b-c)$

$=(a+b+c)(a-b-c)+(a-b-c)$

$=(a-b-c)(a+b+c+1)$.

উদা. 7. Factorize $4x^4+1$ and hence find the two factors of 40001.

$4x^4+1=(2x^2)^2+(1)^2+2.2x^2.1-4x^2=(2x^2+1)^2-(2x)^2$

$=(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)$.

এক্ষণে, $40001=40000+1=4\times10000+1$

$=4\times10^4+1=4x^4+1$ [$10=x$ ধরিয়া]

$=(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)$

$=(2\times10^2+2\times10+1)\times(2\times10^2-2\times10+1)$

$=(200+20+1)(200-20+1)=221\times181$.

উদা. 8. Resolve into factors $3a^2-b^2-c^2-2ab-2bc-2ca$.

প্রদত্ত রাশি $=4a^2-a^2-b^2-c^2-2ab-2bc-2ca$

$=4a^2-(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)$

$=(2a)^2-(a+b+c)^2$

$=(2a+a+b+c)(2a-a-b-c)$

$=(3a+b+c)(a-b-c)$.

উদা. 9. Resolve into factors

$2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$.

প্রদত্ত রাশি $=4a^2b^2-2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$

$=4a^2b^2-(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2)$

$=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2$

$=(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)$

$=\{(a+b)^2-(c)^2\}\{c^2-(a^2+b^2-2ab)\}$

$=(a+b+c)(a+b-c)\{(c^2-(a-b)^2\}$

$=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$.

6. $a^3 \pm b^3$ আকারবিশিষ্ট রাশির উৎপাদক নির্ণয়।

উদা. 10. Resolve into factors $a^6 - b^6$.

প্রদত্ত রাশি $= (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3+b^3)(a^3-b^3)$
$= (a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2$.

উদা. 11. Factorize $8(a+b)^3 - c^3$.

প্রদত্ত রাশি $= \{2(a+b)\}^3 - (c)^3 = (2a+2b)^3 - (c)^3$
$= (2a+2b-c)\{(2a+2b)^2 + (2a+2b)c + c^2\}$
$= (2a+2b-c)(4a^2+4b^2+8ab+2ac+2bc+c^2)$.

উদা. 12. Divide $a^6 + \frac{b^6}{27}$ by $a^2+ab+\frac{b^2}{3}$. [C. U. 1930]

$$a^6+\frac{b^6}{27} = (a^2)^3 + \left(\frac{b^2}{3}\right)^3 = \left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\left(a^4 - \frac{a^2b^2}{3} + \frac{b^4}{9}\right)$$

$$= \left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\left\{(a^2)^2 + 2a^2.\frac{b^2}{3} + \left(\frac{b^2}{3}\right)^2 - a^2b^2\right\}$$

$$= \left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\left\{\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)^2 - (ab)^2\right\}$$

$$= \left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\left(a^2+ab+\frac{b^2}{3}\right)\left(a^2-ab+\frac{b^2}{3}\right)$$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় ভাগফল} = \frac{\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\left(a^2+ab+\frac{b^2}{3}\right)\left(a^2-ab+\frac{b^2}{3}\right)}{\left(a^2+ab+\frac{b^2}{3}\right)}$$

$$= \left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\left(a^2-ab+\frac{b^2}{3}\right)$$

উদা. 13. Show that $(ax+by)^3+(bx+ay)^3$ is divisible by $a+b$ and also by $x+y$. [C. U. '21, '26]

$(ax+by)^3+(bx+ay)^3$
$= (ax+by+bx+ay)\{(ax+by)^2 - (ax+by)(bx+ay) + (bx+ay)^2\}$
$= \{a(x+y)+b(x+y)\}\{(ax+by)^2 - (ax+by)(bx+ay) + (bx+ay)^2\}$
$= (a+b)(x+y)\{(ax+by)^2 - (ax+by)(bx+ay) + (bx+ay)^2\}$.

এক্ষণে, যেহেতু $a+b$ এবং $x+y$ উভয়ই প্রদত্ত রাশির উৎপাদক,

$\therefore$ রাশিটি $a+b$ এবং $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য।

উদা. 14. Factorize $x^3-y^3+3y^2-3y+1$.

প্রদত্ত রাশি $=x^3-(y^3-3y^2+3y-1)=(x)^3-(y-1)^3$
$=(x-y+1)\{x^2+x(y-1)+(y-1)^2\}$
$=(x-y+1)(x^2+xy-x+y^2-2y+1)$
$=(x-y+1)(x^2+y^2+1+xy-x-2y)$.

7. $a^3+b^3+c^3-3abc$ আকারবিশিষ্ট রাশির উৎপাদক নির্ণয়।

উদা. 15. Resolve into factors $a^3+b^3+c^3-3abc$

প্রদত্ত রাশি $=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$
$=(a+b)^3+(c)^3-3ab(a+b)-3abc$
$=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+2ab-ac-bc+c^2-3ab)$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

উদা. 16. Resolve into factors $8x^3-y^3+z^3+6xyz$.

প্রদত্ত রাশি $=(2x)^3+(-y)^3+(z)^3-3(2x).(-y).(z)$
$=(2x-y+z)\{(2x)^2+(-y)^2+(z)^2-(2x)(-y)$
$-(-y)(z)-(z)(2x)\}$
$=(2x-y+z)(4x^2+y^2+z^2+2xy+yz-2xz)$.

[**দ্রষ্টব্য :** সূত্র সাহায্যে সমাধান করা হইল। উদা. 15-এর মত পূর্ণ প্রণালীতে করাই ভাল। তোমরা ঐরূপ করিবে।]

উদা. 17. Resolve into factors $x^3-y^3-1-3xy$.

প্রদত্ত রাশি $=(x)^3+(-y)^3+(-1)^3-3(x)(-y)(-1)$
$=(x-y-1)(x^2+y^2+1+xy+x-y)$.

উদা. 18. Resolve into factors a^6+8a^3+27.

প্রদত্ত রাশি $=a^6-a^3+27+9a^3$
$=(a^2)^3+(-a)^3+(3)^3-3.a^2.(-a).3$

$$=(a^2-a+3)\{(a^2)^2+(-a)^2+(3)^2-(a^2)(-a)-(a^2).3 -(-a).3\}$$
$$=(a^2-a+3)(a^4+a^2+9+a^3-3a^2+3a)$$
$$=(a^2-a+3)(a^4+a^3-2a^2+3a+9).$$

8. বিবিধ রাশির উৎপাদক নির্ণয়।

উদা. 19. Resolve into factors $x^2+4x-21$. [C. U. 1916]

[**দ্রষ্টব্য :** এই form-এ অঙ্ক থাকিলে কষিবার নিয়ম এই—এমন দুইটি সংখ্যা বাহির কর যাহাদের গুণফল -21 (অর্থাৎ x বর্জিত পদ) এবং যোগফল $+4$ (অর্থাৎ x-এর সহগ)। এখানে 7 ও -3 সেই সংখ্যাদ্বয় সুতরাং $4x$ এর স্থানে $7x$ এবং $-3x$ লিখিবে।]

$$x^2+4x-21=x^2+7x-3x-21=x(x+7)-3(x+7)$$
$$=(x+7)(x-3).$$

উদা. 20. Factorize $6x^2+x-15$. [C. U. 1936]

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে x^2-এর সহগ 6কে -15 দিয়া গুণ করিয়া হইল -90 ; এইবার এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের গুণফল -90 এবং সমষ্টি $+1$ (অর্থাৎ x-র সহগ ।)]

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=6x^2+10x-9x-15=2x(3x+5)-3(3x+5)$$
$$=(3x+5)(2x-3).$$

উদা. 21. Factorize $x^2+x-(a+1)(a+2)$.

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে লক্ষ্য কর যে, $(a+2)$ এবং $-(a+1)$ এই দুইটির গুণফল $-(a+1)(a+2)$ এবং যোগফল $+1$ (অর্থাৎ x-এর সহগ) ; সুতরাং x-এর স্থানে $(a+2)x-(a+1)x$ লিখিতে হইবে।]

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=x^2+(a+2)x-(a+1)x-(a+1)(a+2)$$
$$=x(x+a+2)-(a+1)(x+a+2)$$
$$=(x+a+2)(x-a-1).$$

উদা. 22. Factorize $x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1$.

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=x^2-ax-\frac{x}{a}+1=x(x-a)-\frac{1}{a}(x-a)=(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right).$$

উদা. 23. Factorize $(x^2-6x)^2-8(x^2-6x+8)-64$.
[B. U. '26]

প্রদত্ত রাশি $=a^2-8(a+8)-64$. [$x^2-6x=a$ ধরিয়া]
$=a^2-8a-64-64=a^2-8a-128$
$=a^2-16a+8a-128$
$=a(a-16)+8(a-16)=(a-16)(a+8)$
$=(x^2-6x-16)(x^2-6x+8)$ [a-র মান বসাইয়া]
$=(x^2-8x+2x-16)(x^2-4x-2x+8)$
$=\{x(x-8)+2(x-8)\}\{x(x-4)-2(x-4)\}$
$=(x-8)(x+2)(x-2)(x-4)$.

উদা. 24. Factorize $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.
[C. U. 1941 ; M. U. 1926]

প্রদত্ত রাশি $=\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+15$
$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$
$=(a+7)(a+15)+15$ [$x^2+8x=a$ ধরিয়া]
$=a^2+22a+105+15$
$=a^2+22a+120=a^2+12a+10a+120$
$=a(a+12)+10(a+12)$
$=(a+10)(a+12)=(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$
$=(x^2+8x+10)(x^2+6x+2x+12)$
$=(x^2+8x+10)\{x(x+6)+2(x+6)\}$
$=(x^2+8x+10)(x+6)(x+2)$.

[দ্রষ্টব্য : এখানে বন্ধনী চারিটি একত্রে গুণ না করিয়া দুইটি দুইটি বন্ধনী গুণ করা হইয়াছে, কিন্তু যে-কোন দুইটি বন্ধনী লওয়া হয় নাই। এমন দুই দুইটি বন্ধনী লইয়া দুই দল করিতে হইবে যেন প্রথম দলের বন্ধনী দুইটির যোগফল, অন্য দলের বন্ধনী দুইটির যোগফলের সমান হয়।]

উদা. 25. Factorize $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6)+24$.
[D. B. '22]

প্রদত্ত রাশি $=(x+1)(x-4)(x+3)(x-6)+24$
$=(x^2-3x-4)(x^2-3x-18)+24$
$=(a-4)(a-18)+24$ [$x^2-3x=a$ মনে কর]
$=a^2-22a+96=a^2-16a-6a+96=a(a-16)-6(a-16)$
$=(a-6)(a-16)=(x^2-3x-6)(x^2-3x-16)$.

9. **পরীক্ষা দ্বারা উৎপাদক নির্ণয়।**

উদা. 26. Factorize x^3-3x+2. [C. U. 1930 ; D. B. 1929]

[দ্রষ্টব্য : প্রথমে দেখ, x-এর মান কত ধরিলে প্রদত্ত রাশিটির মান শূন্য এখানে যদি x-এর মান $+1$ ধরি তবে রাশিটির মান 0 হয়, সুতরাং উহার একটি factor হইবে $x-1$. এইরূপে যদি x-এর মান -1 ধরিয়া রাশিটির মান শূন্য হইত, তবে $x+1$ ইহার একটি factor হইত।]

$$x^3-3x+2=x^3-x^2+x^2-x-2x+2$$
$$=x^2(x-1)+x(x-1)-2(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)(x^2+2x-x-2)$$
$$=(x-1)\{x(x+2)-1(x+2)\}$$
$$=(x-1)(x+2)(x-1)=(x-1)^2(x+2).$$

[N. B. এখানে প্রথমে ঠিক হইল যে x-এর মান $+1$ হইলে রাশিটির মান 0 হয়, সুতরাং উহার একটি উৎপাদক $x-1$. এইবার রাশিটি কি ভাবে ভাঙ্গিয়া সাজাইতে হইবে তাহা স্থির করিবার সময় বালকেরা প্রায়ই ভুল করে। তোমরা ঐ $x-1$ দ্বারা রাশিটিকে ভাগ করিয়া ভাগফল কি হয় দেখ। এখানে ভাগফল হইবে x^2+x-2 এইবার ঐ ভাগফলের প্রত্যেক পদটির সহিত ঐ factor $(x-1)$-কে গুণের আকারে লিখিলেই রাশিটির সমান হইবে।]

উদা. 27. Factorize x^3-x^2-7x-2.

এখানে x-এর মান -2 হইলে রাশিটির মান শূন্য হয়, সুতরাং $x+2$ উহার একটি গুণনীয়ক (factor)।

অতএব, প্রদত্ত রাশিটি $=x^3+2x^2-3x^2-6x-x-2$

$$=x^2(x+2)-3x(x+2)-1(x+2)=(x+2)(x^2-3x-1).$$

উদা 28. Factorize $x^3-6x^2+11x-6$. [A. U. 1921]

এখানে x-এর মান 1 হইলে রাশিটির মান 0 হইবে।

$\therefore$ $x-1$ উহার একটি factor.

$$\therefore\ x^3-6x^2+11x-6=x^3-x^2-5x^2+5x+6x-6$$
$$=x^2(x-1)-5x(x-1)+6(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2-5x+6)=(x-1)(x^2-3x-2x+6)$$
$$=(x-1)\{x(x-3)-2(x-3)\}=(x-1)(x-3)(x-2).$$

উদা. 29. Factorize $8a^3+4a-3$.

প্রদত্ত রাশি $=8a^3-1+4a-2=\{(2a)^3-(1)^3\}+2(2a-1)$

$=(2a-1)(4a^2+2a+1)+2(2a-1)$

$=(2a-1)(4a^2+2a+1+2)=(2a-1)(4a^2+2a+3)$.

উদা. 30. Factorize $x^4-x^3-7x^2+x+6$.

[এখানে পরীক্ষা দ্বারা দেখা যায় যে x-এর মান $1, -1, -2, 3$ যে কোন একটি বসাইলে প্রদত্ত রাশির মান শূন্য হয়, সুতরাং $x-1$, $x+1$, $x+2$, $x-3$ ঐ রাশির এক একটি উৎপাদক হইবে। এখানে রাশিটির পদগুলিকে এরূপে সাজাও যেন উহাদের দুই দুইটির মধ্যে $x+1$ উৎপাদক থাকে।]

প্রদত্ত রাশি $=x^4+x^3-2x^3-2x^2-5x^2-5x+6x+6$

$=x^3(x+1)-2x^2(x+1)-5x(x+1)+6(x+1)$

$=(x+1)(x^3-2x^2-5x+6)$

[এক্ষণে দ্বিতীয় উৎপাদকটির $(x-1)$ উৎপাদক হয় এরূপে সাজাও]

$=(x+1)(x^3-x^2-x^2+x-6x+6)$

$=(x+1)\{x^2(x-1)-x(x-1)-6(x-1)\}$

$=(x+1)(x-1)(x^2-x-6)$

[তৃতীয় উৎপাদকটিকে এরূপে সাজাও যেন $x+2$ একটি উৎপাদক হয়।

$=(x+1)(x-1)(x^2+2x-3x-6)$

$=(x+1)(x-1)(x+2)(x-3)$.

10. আক্ষরিক অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া সমাধান।

উদা. 31. Factorize $a^2-2b^2-3c^2+ab+2ac+7bc$.

[রাশিমালাটির অন্তর্গত $a, b, c,$ অক্ষর তিনটির মধ্যে যে কোন একটি অক্ষরের ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে প্রথমে সাজাও।]

প্রদত্ত রাশি $=a^2+ab+2ac-2b^2+7bc-3c^2$

$=a^2+(b+2c)a-(2b^2-7bc+3c^2)$

$=a^2+(b+2c)a-(2b^2-6bc-bc+3c^2)$

$=a^2+(b+2c)a-(2b-c)(b-3c)$

$=a^2+(2b-c)a-(b-3c)a-(2b-c)(b-3c)$

$=a(a+2b-c)-(b-3c)(a+2b-c)$

$=(a+2b-c)(a-b+3c)$.

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে $-(2b-c)(b-3c)$ কে এরূপ দুইটি রাশিতে বিভক্ত করা হইল যাহাদের যোগফল a-এর সহগের সমান অর্থাৎ $b+2c$ এবং গুণফল $-(2b-c)(b-3c)$ হয়। সেই রাশি দুইটি হইল $(2b-c)$ এবং $-(b-3c)$. প্রদত্ত রাশিতে a^2 এর যদি কোন সাংখ্য সহগ থাকিত, তবে প্রথমে $-(2b-c)(b-3c)$ এর সহিত সেই সহগের গুণফলকে ঐরূপ দুই রাশিতে বিভক্ত করিতে হইত।]

উদা. 32. Factorize $a^2-3bc+3b^2-4ab+ac$.

প্রদত্ত রাশি $=(a^2-4ab+3b^2)+ac-3bc$

$$=(a^2-ab-3ab+3b^2)+c(a-3b)$$

$$=(a-b)(a-3b)+c(a-3b)$$

$$=(a-3b)(a-b+c).$$

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে প্রদত্ত রাশিতে যে যে পদ a ও b এর দুই মাত্রাবিশিষ্ট সেই পদগুলি একত্রে লইয়া একদল এবং অন্যপদগুলি একত্রে লইয়া আর একদল করা হইয়াছে।]

উদা. 33 Resolve into factors $a^4+a^3-10a^2+a+1$

[যে রাশির প্রথম ও শেষ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সহগ সমান, তাহার উৎপাদক নির্ণয়ের সময় ঐরূপ পদদ্বয়কে একত্রে লইতে হইবে।]

প্রদত্ত রাশি $=(a^4+1)+(a^3+a)-10a^2$

$=(a^2+1)^2-2a^2+a(a^2+1)-10a^2=(a^2+1)^2+a(a^2+1)-12a^2$

$=x^2+ax-12a^2$ [$a^2+1=x$ ধরিয়া] $=x^2+4ax-3ax-12a^2$

$=(x+4a)(x-3a)=(a^2+1+4a)(a^2+1-3a).$

11. **চক্রক্রম** (**Cyclic order**) **:** একটি চক্র বা বৃত্তের পরিধির উপর পর পর a, b, c বসাইয়া যদি a হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে সেই-ক্রমে পড়া যায়, তবে abc এই-ক্রমে অক্ষরগুলি পাওয়া যায়। ঐরূপ b হইতে আরম্ভ করিলে bca এবং c হইতে আরম্ভ করিলে cab ক্রমে পাওয়া যায়। এইরূপ ক্রমকে চক্রক্রম বলা হয়।

চক্রক্রমে সাজান রাশির উৎপাদক নির্ণয়ের জন্য প্রথমে রাশিটিকে যে কোন একটি অক্ষরের (ধর a) ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইবে। তারপর লব্ধ দুইটি উৎপাদকের মধ্যে দেখিবে একটিকে b-এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়। এইভাবে পর পর a, b, c এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া উৎপাদক নির্ণয় করা সহজ হইবে। আর উত্তরটিকে চক্রক্রমে সাজাইয়া লিখিবে। মনে কর, উত্তর হইল $(a-b)(b-c)(a-c)$, উহা চক্রক্রমের আকারে না থাকায়, উহাকে চক্রক্রমের আকারে সাজাইয়া লেখা হয়। এখানে $a-c$ চক্রক্রমে নাই, $a-c$ কে $-(c-a)$ লেখা যায় এবং তাহা চক্রক্রমের সহিত মিলিয়া যায়। সেজন্য উত্তরটিকে $-(a-b)(b-c)(c-a)$ লেখা হয়।

[**দ্রষ্টব্য ঃ** চক্রক্রমের অঙ্কে a, b, c-এর পরিবর্তে x, y, z থাকিলেও ঐ নিয়মেই সমাধান করিবে। $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$ এই রাশিটির উৎপাদক নির্ণয়ের জন্য উদা. 34-এ a, b, c-এর পরিবর্তে a^2, b^2, c^2 বসাইয়া সমাধান করিবে।]

[Factors of Cyclic order]

উদা. 34. Factorize $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.
[C. U. 1928, '40, '45 ; D. B. '24 , G. U. '48

প্রদত্ত রাশি $= a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$= a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$

$= (b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\} = (b-c)(a^2-ab-ac+bc)$

$= (b-c)\{a(a-b)-c(a-b)\}$

$= (b-c)(a-b)(a-c) = -(a-b)(b-c)(c-a)$.

[**দ্রষ্টব্য ঃ** রাশিটি ভাঙ্গিবার সময় প্রথম বন্ধনী ঠিক রাখিয়া বাকীগুলিকে ভাঙ্গিয়া এমনভাবে আবার সাজাইতে হইবে যাহাতে প্রত্যেক বন্ধনীর ভিতর প্রথম বন্ধনীর $(b-c)$ পাওয়া যায়। আর, উত্তরটি $(a-b)(b-c)(a-c)$ দেওয়া যায়, কিন্তু সাধারণ নিয়ম এই যে, cyclic order-এর factorগুলি cyclic orderএ উত্তর দিতে হয়। Cyclic order হইবে

$(a-b)(b-c)(c-a)$, উত্তরে $(a-c)$ এইটি cyclic order এর সহিত মিলিতেছে না, cyclic order $(c-a)$ হইবে। এখন দেখ $a-c=-c+a$ $=-(c-a)$, সুতরাং $a-c$ এর স্থানে $-(c-a)$ লেখা যায়। $(c-a)$ [illegible] চিহ্ন আছে, উহা সর্ব প্রথমে বসাইতে হয়।]

উদা. 35. Factorize $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$. [P.U.'30]

প্রদত্ত রাশি $=bc(b-c)+c^2a-ca^2+a^2b-ab^2$

$=bc(b-c)+a^2b-a^2c-ab^2+ac^2$

$=bc(b-c)+a^2(b-c)-a(b^2-c^2)=(b-c)(bc+a^2-ab-ac)$

$=(b-c)\{a(a-c)-b(a-c)\}=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

উদা. 36. Factorize $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$.

[D. B. 1930]

প্রদত্ত রাশি $=a(b^2-c^2)+bc^2-a^2b+a^2c-b^2c$

$=a(b^2-c^2)-a^2(b-c)-bc(b-c)$

$=(b-c)(ab+ac-a^2-bc)=(b-c)\{a(c-a)-b(c-a)\}$

$=(b-c)(c-a)(a-b)=(a-b)(b-c)(c-a)$.

উদা. 37. Factorize $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$.

প্রদত্ত রাশি $=a^3(b-c)+b^3c-ab^3+ac^3-bc^3$

$=a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$

$=a^3(b-c)-a(b-c)(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)(b-c)$

$=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$=(b-c)(a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2)$

$=(b-c)(a^3-ab^2-abc+b^2c-ac^2+bc^2)$

$=(b-c)\{a(a^2-b^2)-bc(a-b)-c^2(a-b)\}$

$=(b-c)(a-b)(a^2+ab-bc-c^2)$

$=(a-b)(b-c)\{(a+c)(a-c)+b(a-c)\}$

$=(a-b)(b-c)(a-c)(a+c+b)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

উদা. 38. Factorize $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$. [C. U. '29, '39]

মনে কর, $x=b-c$, $y=c-a$, $z=a-b$,

$\therefore\ x+y+z=b-c+c-a+a-b=0.$

এক্ষণে, $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$

$=x^3+y^3+z^3=x^3+y^3+z^3-3xyz+3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=0\times(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=0+3xyz=3xyz=3(b-c)(c-a)(a-b).$

উদা. 39. Factorize $(x+a)^2(b-c)+(x+b)^2(c-a)+(x+c)^2(a-b)$.

প্রদত্ত রাশি $=(x^2+2ax+a^2)(b-c)+(x^2+2bx+b^2)(c-a)+(x^2+2cx+c^2)(a-b)$

$=x^2(b-c+c-a+a-b)+2x\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}+a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=x^2\times0+2x\times0+a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a).$

উদা. 40. Resolve into factors

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc.$ [C. U. '32, '35]

প্রদত্ত রাশি $=(a^2b+a^2c+abc)+(b^2c+ab^2+abc)+(c^2a+c^2b+abc)$

$=a(ab+ac+bc)+b(bc+ab+ac)+c(ac+bc+ab)$

$=(ab+ac+bc)(a+b+c).$

[এখানে $3abc$র এক একটি abcকে এক একটি পদের সহিত লওয়া হইল।]

উদা. 41. Factorize $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$. [C. U. 1939]

প্রদত্ত রাশি $=bc(b+c)+abc+ca(c+a)+abc+ab(a+b)+abc$

$=bc(b+c+a)+ca(c+a+b)+ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(bc+ca+ab).$

উদা. 42. Factorize $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc.$

প্রদত্ত রাশি $=(a^2b+a^2c+abc)+(ab^2+abc+b^2c)$
$+(abc+ac^2+bc^2)$
$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$ [উদা 40 দেখ]

উদা. 43. Factorize $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc.$
[C. U. '33, '50]

প্রদত্ত রাশি $=a^2(b+c)+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+2abc$
$=a^2(b+c)+(ab^2+ac^2+2abc)+(b^2c+bc^2)$
$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)=(b+c)(a^2+ab+ac+bc)$
$=(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}=(b+c)(c+a)(a+b).$

উদা. 44. Factorize $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc.$

প্রদত্ত রাশি $=bc(b+c)+ac^2+a^2c+a^2b+ab^2+2abc$
$=bc(b+c)+(a^2b+a^2c)+(ab^2+ac^2+2abc)$
$=bc(b+c)+a^2(b+c)+a(b+c)^2=(b+c)(bc+a^2+ab+ac)$
$=(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}=(b+c)(c+a)(a+b).$

উদা. 45. Factorize $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc.$

প্রদত্ত রাশি $=a(b^2+c^2)+2abc+a^2b+a^2c+b^2c+bc^2$
$=a(b^2+c^2+2bc)+a^2(b+c)+bc(b+c)$
$=a(b+c)^2+a^2(b+c)+bc(b+c)$
$=(b+c)(ab+ac+a^2+bc)=(b+c)(c+a)(a+b).$

উদা. 46. Factorize $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$
$+a^3+b^3+c^3.$

প্রদত্ত রাশি $=\{a^2(b+c)+a^3\}+\{b^2(c+a)+b^3\}+\{c^2(a+b)+c^3\}$
$=a^2(b+c+a)+b^2(c+a+b)+c^2(a+b+c)$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$

উদা 47. Factorize $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3.$

প্রদত্ত রাশি $=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)-x^3-y^3-z^3$
$=3(x+y)(y+z)(z+x).$

উদা. 48. Factorize $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+9abc$.
[A. U. 1922]

প্রদত্ত রাশি $=a(b^2-2bc+c^2)+b(c^2-2ca+a^2)+c(a^2-2ab+b^2)+9abc$
$=b^2(c+a)+c^2(a+b)+a^2(b+c)-2abc-2abc-2abc+9abc$
$=b^2(c+a)+c^2(a+b)+a^2(b+c)+3abc$
$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$. [উদা. 40 দেখ]

উদা. 49. Factorize $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$.

প্রদত্ত রাশি $=\{a+(b+c)\}\{a(b+c)+bc\}-abc$
$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)+abc-abc$
$=(b+c)(a^2+ab+ac+bc)=(b+c)(c+a)(a+b)$

উদা. 50. Factorize $(b+c)(c+a)(a+b)+abc$.

প্রদত্ত রাশি $=a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+2abc+abc$
$=(a^2b+ab^2+abc)+(b^2c+bc^2+abc)+(a^2c+ac^2+abc)$
$=ab(a+b+c)+bc(b+c+a)+ca(a+c+b)$
$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

উদা. 51. Factorize $(3x-2y)^3-(2x-3y)^3-(x+y)^3$.

মনে কর, $a=2x-3y$, $b=x+y$, $\therefore$ $a+b=3x-2y$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=(a+b)^3-a^3-b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)-a^3-b^3$
$=3ab(a+b)=3(2x-3y)(x+y)(3x-2y)$.

উদা. 52. Factorize $x^3+(x-1)^3+(1-2x)^3$. [D. B. 1940]

মনে কর, $a=x$, $b=x-1$, $c=1-2x$,
$\therefore$ $a+b+c=x+x-1+1-2x=0$.

এক্ষণে, প্রদত্ত রাশি $=a^3+b^3+c^3=3abc$ [$\because$ $a+b+c=0$]
$=3x(x-1)(1-2x)$ [a, b, c এর মান বসাইয়া]

উদা. 53. Factorize $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)$.
[উদা. 20 দেখ] [D. B. 1933]

প্রদত্ত রাশি $=(ab-ac)x^2+(bc-ab)x+(ac-bc)$
$=(ab-ac)x^2-(ab-ac)x-(ac-bc)x+(ac-bc)$
[$\because$ $-(ab-ac)-(ac-bc)=(bc-ab)$]

$=(ab-ac)x(x-1)-(ac-bc)(x-1)$
$=(x-1)\{(ab-ac)x-(ac-bc)\}=(x-1)(abx-acx-ac+bc).$

উদা. 54. Factorize $8(a+b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3-(c+a)^3$.
প্রদত্ত রাশি $=(2a+2b+2c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3-(c+a)^3$
$\{(a+b)+(b+c)+(c+a)\}^3-(a+b)^3-(b+c)^3-(c+a)^3$
$=(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3+3(a+b+b+c)$
$\times(b+c+c+a)(c+a+a+b)-(a+b)^3-(b+c)^3-(c+a)^3$
$=3(a+2b+c)(a+b+2c)(2a+b+c)$

উদা 55 Factorize $(2b-a)^3+(2a-b)^3-(a+b)^3$.
[B U. 1900]

মনে কর, $x=2b-a$, $y=2a-b$, $\therefore\ x+y=a+b$.
এক্ষণে প্রদত্ত রাশি $=x^3+y^3-(x+y)^3$
$=x^3+y^3-\{x^3+y^3+3xy(x+y)\}$
$=x^3+y^3-x^3-y^3-3xy(x+y)=-3xy(x+y)$
$=-3(2b-a)(2a-b)(a+b)$
$=3(a-2b)(2a-b)(a+b)$ [$\because\ -(2b-a)=(a-2b)$]

উদা 56 Factorize $(a+b-2c)^3+(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3$.
[I P. S. 1926]

মনে কর, $x=a+b-2c$, $y=b+c-2a$, $z=c+a-2b$
$\therefore\ x+y+z=a+b-2c+b+c-2a+c+a-2b=0$
$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=x^3+y^3+z^3=3xyz$ [$\because\ x+y+z=0$]
$=3(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b)$

উদা. 57. Factorize $a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3$
প্রদত্ত রাশি $=(ab-ac)^3+(bc-ab)^3+(ac-bc)^3$
$=3(ab-ac)(bc-ab)(ac-bc)$
[$\because\ ab-ac+bc-ab+ac-bc=0$]
$=-3abc(b-c)(c-a)(a-b)$

উদা. 58. Factorize $2a^2+2a-3ab-b+b^2$. [D. B. 1949]
প্রদত্ত রাশি $=(2a^2-3ab+b^2)+2a-b$
$=(2a^2-2ab-ab+b^2)+1(2a-b)$
$=(2a-b)(a-b)+1(2a-b)=(2a-b)(a-b+1)$.

Exercise 2

Rosolve into factors :—

1. $m^4+m^2n^2+n^4$. [C. U. '33] 2. x^4+4. [C. U. '34]
3. $4x^2-4xy-2yz-z^2$. [C. U. '35]
4. $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc)$. [W. B. S. F. '53]
5. $4x^4+81$. [C. U. '37] 6. x^4+2x^2+9. [D. B. '30]
7. x^4+64. [W. B. S. F. '52 ; B. U. 1920 ; D. B. '31]
8. x^4-8x^2+4. [B. U. '24]
9. $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$. [B. U. '23]
10. x^6-729. [D. B. '37]
11. $x^2-y^2-6xa+2ya+8a^2$ [D. B. '48]
12. $12x^2+65x+77$. [D. B. '34]
13. $x^2+40xy-21y^2$. [D. B. '38]
14. $8a^4+2a^2-45$. [A. U. '27] 15. a^6+32a^3-64.
16. $a^3+b^3-8c^3+6abc$.
17. $a^3-3a-2a^2+4$. [C. U. '39]
18. $x^3+16x^2+13x-30$. [D. B. '36]
19. $x^3+9x^2+26x+24$. [D. B. '38]
20. $(x^2-4x)(x^2-4x-1)-20$. [B. U. '12]
21. $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$. [P. U '26]
22. $2(ab+cd)-a^2-b^2+c^2+d^2$ [C. U. '09]
23. $(a+b)^2-10(a^2-b^2)-56(a-b)^2$. [B. U. '34]
24. $x(x-1)(x-2)+3x+3$. [D. B '36]
25. $a(a-1)(a-2)(a-3)-120$.
26. $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6)+13$.
27. $(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$. [D. B. '32]
28. $x^3-y^3+z^3+3xyz$. [A. U. '28]
29. $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$. [M. U. '27]

30. $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$.

31. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$.

32. $(2x-3y)^3+(3y-z)^3+(z-2x)^3$.

33. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-3$. [C. U. 1946]

34. $x^2+2x-(a+1)(a+3)$.

[Hints : $2x=(a+3)x-(a+1)x$]

35. $x(2x+1)(x-2)(2x-3)-63$.

[$x(2x-3)$ একদল এবং $(2x+1)(x-2)$ আর একদল কর।]

36. $(a+2b-c)^3-(a+b)^3-(b-c)^3$.

[Hints . $(a+2b-c)^3=\{(a+b)+(b-c)\}^3$]

37. $4(ad-bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$.

[Hints : $4(ad-bc)^2=(2ad-2bc)^2$]

38. $(1-c^2)(1+a)^2-(1-a^2)(1-c)^2$. [C. U. 1881]

39. (i) $4(x^2+2x+5)^2+17(x^2+2x+5)(x^2+6x)+4(x^2+6x)^2$

(ii) $a^4+6a^3+4a^2-15a+6$. [C. U. 1948]

40. $x^4+x^3+2x^2+x+1$ [C. U. 1948]

41. $x^2(b-c)+b^2(c-x)+c^2(x-b)$. [D. B '27]

42. x^6-22x^3+125.

43. $6a^2-2b^2-5bc-ab+11ac+3c^2$.

44. $a^4-5a^3b+6a^2b^2-5ab^3+b^4$.

45. $a^4b^4+1+a^2b^2-c^2+2abc$.

46. $x^5+4x^4-13x^3-13x^2+4x+1$.

47. $xy(x^3-y^3)+yz(y^3-z^3)+zx(z^3-x^3)$.

48. $(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5$.

The Remainder Theorem and Divisibility
(ভাগশেষ ও বিভাজ্যতা বিষয়ক উপপাদ্য)

12. **অপেক্ষক :** x, a প্রভৃতি যে কোন অক্ষরযুক্ত রাশিকে সেই অক্ষরটির রাশিমালা বা অপেক্ষক (function বা expression) বলে অপেক্ষকটির মান ঐ অক্ষরটির মানের উপর নির্ভর করে। ঐ অক্ষরটিকে ঐ অপেক্ষকের **চল** (variable) বলে। যথা—

(1) x^2+3x+2, a^3+5a^2+4 প্রভৃতি রাশি যথাক্রমে x ও a এর অপেক্ষক। প্রথমটিতে x এবং দ্বিতীয়টিতে a চল।

(2) অনুরূপে a^2+ab+b^2 বা x^3-y^3কে যথাক্রমে a ও b এর এবং x ও y এর অপেক্ষক বলে।

লিখন প্রণালী : x-যুক্ত কোন অপেক্ষক বা রাশিমালাকে সংক্ষেপে $f(x)$ লেখা হয়।

এখন দেখ, $2x^2+3x-4$ একটি অপেক্ষক, সুতরাং $f(x)=2x^2+3x-4$ এক্ষণে যদি $x=2$ ধরা হয়, তবে $f(2)=2.2^2+3.2-4$ হইবে।

অনুরূপে $f(0)=2.0^2+3.0-4$ হইবে।

মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক : কোন অপেক্ষকের চল রাশিটির (x বা a এর ঘাতগুলি যদি ধনাত্মক পূর্ণ বা অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে তাহাকে মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক (Rational and integral function) বলে। এই অপেক্ষকে চল রাশিটির কোন মূল থাকে না।

$px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots+lx+m$ রাশিমালায় যদি n অখণ্ড ধনরাশি (positive integer) হয় এবং $p, q, r, \cdots l, m$ এর প্রত্যেকটি যদি ধ্রুবক হয়, তবে উহাকে x-এর মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক বলে।

13. ভাগশেষ বিষয়ক উপপাদ্য (Remainder Theorem)

x-যুক্ত কোন মূলদ অখণ্ড রাশিমালাকে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগশেষ হইবে তাহা ঐ রাশিমালায় x এর স্থানে a বসাইয়া পাওয়া যায়

(অর্থাৎ x এর স্থানে a বসাইয়া ঐ রাশিমালার যে মান হইবে তাহাই নির্ণেয় ভাগশেষ)।

প্রমাণ (প্রথম প্রণালী) : $x-a$) mx^2+nx+l ($mx+(ma+n)$

$$mx^2-max$$
$$(ma+n)x+l$$
$$(ma+n)x-a(ma+n)$$
$$ma^2+na+l,$$ ইহাই ভাগশেষ।

এখন দেখ প্রদত্ত রাশিমালায় x এর স্থানে a বসাইলে পাই ma^2+na+l, সুতরাং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

(**দ্বিতীয় প্রণালী**) : মনে কর, উক্ত ভাগ প্রক্রিয়ায় Q ভাগফল এবং R ভাগশেষ (x-বর্জিত)।

এক্ষণে প্রমাণ করিতে হইবে যে, $R=ma^2+na+l$.

প্রমাণ : $\because$ ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ,

$\therefore$ $mx^2+nx+l=(x-a)\times Q+R$, ইহা একটি অভেদ বলিয়া x এর যে কোন মান ধরিলে উভয় পক্ষ সমান থাকিবে এবং R-এর মানের কোন পরিবর্তন হইবে না, কারণ, উহা x-বর্জিত। মনে কর, xএর মান a ধরিলে Q-এর মান Q′ হইবে।

$\therefore$ $ma^2+na+l=(a-a)\times Q'+R=0\times Q'+R=R.$

অতএব, উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

[**দ্রষ্টব্য** : (1) কোন রাশিমালাকে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিয়া কত ভাগশেষ থাকে তাহা ঐ রাশিমালায় x এর স্থানে a বসাইয়া পাওয়া যায়।

(2) কোন রাশিমালাকে $x+a$ দ্বারা ভাগ করিলে কত ভাগশেষ হয় তাহা নির্ণয় করিবার জন্য ঐ রাশিমালায় x এর মান $-a$ ধরিতে হয়।

(3) কোন রাশিমালাকে $bx+a$ দ্বারা ভাগ করিলে কত ভাগশেষ হয়, তাহা নির্ণয় করিবার জন্য ঐ রাশিমালায় x এর মান $-\frac{a}{b}$ ধরিতে হয়।]

উদাহরণ। Find, without actual division, the remainder in the following :—

(a) $(x^3+2x^2-3x+5)\div(x-3)$.

) $(px^2+qx+r)\div(x+a)$.

(a) এস্থানে ভাজ্যে x এর মান 3 বসাইলে ভাগশেষ পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $=(3)^3+2.(3)^2-3\times3+5$
$=27+18-9+5=41.$

(b) $\because$ ভাজকটি $x+a$, $\therefore$ ভাজ্যে $x=-a$ ধরিলে ভাগশেষটি পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $=p(-a)^2+q(-a)+r=pa^2-qa+r.$

14 গুণনীয়ক উপপাদ্য (The Factor Theorem)

x-এর কোন মূলদ অখণ্ড রাশিমালায় যদি x-এর মান a ধরিলে রাশিমালাটির মান শূন্য (0) হয়, তবে $(x-a)$ ঐ রাশিমালার একটি গুণনীয়ক (factor) হইবে অর্থাৎ রাশিমালাটি $x-a$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

[সংক্ষেপে বলা যায়, $f(a)=0$ হইলে, $f(x)$ এর একটি গুণনীয়ক $(x-a)$ হইবে।]

প্রমাণ: $\because$ প্রদত্ত রাশিমালায় x-এর স্থানে a বসাইলে রাশিমালার মান শূন্য হয়,

$\therefore$ ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে উহাকে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ শূন্য হইবে।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালাটি $x-a$ দ্বারা বিভাজ্য অর্থাৎ $x-a$ উহার একটি গুণনীয়ক।

[**দ্রষ্টব্য:** (1) x-এর মান $-a$ ধরিলে যদি কোন রাশিমালার মান শূন্য (0) হয়, তবে রাশিমালাটি $x-(-a)$ বা $x+a$ দ্বারা বিভাজ্য, অর্থাৎ $x+a$ উহার একটি গুণনীয়ক।

(2) x-এর মান $-\frac{b}{a}$ ধরিলে যদি রাশিমালার মান শূন্য হয়, তবে $ax+b$ উহার একটি গুণনীয়ক হইবে।]

উদাহরণমালা 3

উদা. 1. Prove that $x^3-7x^2+11x-2$ is exactly divisible by $x-2$.

এখানে ভাজক $=x-2$, সুতরাং, x এর মান 2 হইলে যদি প্রদত্ত রাশিমালার মান 0 হয়, তবে উহা $x-2$ দ্বারা বিভাজ্য।

এক্ষণে, $x^3-7x^2+11x-2=(2)^3-7(2)^2+11\times 2-2$

$$=8-28+22-2=0.$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $x-2$ দ্বারা বিভাজ্য।

Show that $x-1$ is a factor of x^4-3x^2+2.

প্রদত্ত রাশিমালায় x এর মান 1 বসাইলে উহার মান $=(1)^4-3.(1)^2+2$ $=1-3+2=0$ হয়, $\therefore$ রাশিমালাটির একটি গুণনীয়ক $x-1$ হইবে।

উদা. 3. Find for what value of p the expression $x^5-61x+p$ is exactly divisible by $x+1$. [M. U. 1926]

এখানে ভাজক $x+1$, সুতরাং $x=-1$ ধরিলে যদি প্রদত্ত রাশিমালার মান শূন্য হয়, তবে উহা $x+1$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

এক্ষণে, $x^5-61x+p=(-1)^5-61\times(-1)+p=-1+61+p$

$$=60+p.$$

$\therefore$ এখানে $60+p=0$, $\therefore$ $p=-60$.

উদা. 4. Find the relation between b and c so that x^3+bx+c and x^3+cx+b may have a common factor. [P. U. 1891]

মনে কর, সাধারণ গুণনীয়কটি $(x-a)$.

এক্ষণে $\because$ x^3+bx+c এর $x-a$ একটি গুণনীয়ক,

$\therefore$ $a^3+ab+c=0\cdots\cdots(1)$.

আবার, $\because$ x^3+cx+b এর $x-a$ একটি গুণনীয়ক,

$\therefore$ $a^3+ac+b=0\cdots\cdots(2)$.

এক্ষণে (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই

$ab-ac-b+c=0$, বা $a(b-c)=b-c$, $\therefore$ $a=\frac{b-c}{b-c}=1$.

এক্ষণে (1)-এ a এর মান 1 বসাইয়া পাই

$1^3+1.b+c=0$, বা, $b+c+1=0$.

$\therefore$ নির্ণেয় সর্ত হইল $b+c+1=0$ হইবে।

উদা. 5. What value (not zero) must a have, if x^2+x-a and x^3-x-a have a common factor ? [P. U. 1925]

মনে কর, সাধারণ গুণনীয়কটি $x-p$,

$\because$ x^2+x-a এর একটি গুণনীয়ক $x-p$, $\therefore$ $p^2+p-a=0$ ...(1)

আবার, $\because$ x^3-x-a এর একটি গুণনীয়ক $x-p$,

$\therefore$ $p^3-p-a=0$ ....(2).

এক্ষণে, (1) − (2) করিয়া পাই, $-p^3+p^2+2p=0$,

বা, $-p(p^2-p-2)=0$, বা, $-p(p-2)(p+1)=0$,

$\therefore$ $p=0, -1, 2$ হইতে পারে।

p এর মান (1)-এ বসাইলে a এর নির্ণেয় মান পাওয়া যাইবে।

$\because$ (1)-এ $p=-1$ বা 0 বসাইলে $a=0$ হয়, সুতরাং উহা গ্রাহ্য হইবে না (প্রদত্ত সর্ত অনুসারে)।

এক্ষণে (1)-এ $p=2$ ধরিলে পাই $2^2+2-a=0$, $\therefore$ $a=6$.

$\therefore$ a-এর নির্ণেয় মান 6 হইল।

উদা. 6. Find the condition that $x^3+(p+q)x+a$ may be divisible by $x+p+q$. [P. U. 1895]

এখানে ভাজক $x+p+q$, সুতরাং $x+p+q=0$ অর্থাৎ $x=-(p+q)$ হইলে যদি প্রদত্ত রাশিমালার মান শূন্য হয়, তবে উহা $x+p+q$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

এক্ষণে, $\{-(p+q)\}^3+(p+q)\times-(p+q)+a=0$,

বা, $-(p+q)^3 \quad (p+q)^2+a=0$, বা $(p+q)^3+(p+q)^2-a=0$,

বা, $(p+q)^3+(p+q)^2=a$, বা, $(p+q)^2(p+q+1)=a$.

অতএব, $a=(p+q)^2(p+q+1)$ হইবে, ইহাই নির্ণেয় সর্ত।

উদা 7. If $x+a$ be the H. C. F. of px^2+qx+r and rx^2+qx+p, prove that $p+q+r=0$, or $q=p+r$.

$\because$ $x+a$ প্রদত্ত রাশি দুইটির গ. সা গু.,

$\therefore$ $x+a=0$ অর্থাৎ $x=-a$ হইলে রাশি দুইটির মান শূন্য হইবে।

প্রদত্ত রাশি দুইটিতে x এর মান $-a$ বসাইয়া পাই

$pa^2-qa+r=0$ ...(1) এবং $ra^2-qa+p=0$ ...(2)

(1) − (2) করিয়া পাই $pa^2 - ra^2 - p + r = 0$,

বা, $a^2(p-r) - (p-r) = 0$,

বা, $a^2(p-r) = (p-r)$, বা, $a^2 = 1$, $a = \pm 1$

$a = 1$ হয়, তবে (1) হইতে পাই $p(1)^2 - q(1) + r = 0$

$q + r = 0$, $\therefore$ $q = p + r$.

আবার যদি $a = -1$ হয়, তবে (1) হইতে পাই

$p(-1)^2 - q(-1) + r = 0$, বা, $p + q + r = 0$.

অতএব $x + a$ প্রদত্ত রাশি দুইটির গ. সা. গু. হইলে

$p + q + r = 0$ অথবা $q = p + r$ হইবে।

উদা. 8. Shew that $(ax+by)(bx+cy)(cx+ay) - (ay+bx) \times (by+cx)(cy+ax)$ contains the factors $(x-y)$, $(a-b)$, $(b-c)$ and $(c-a)$. [M. U. 1874]

যদি $x - y$ এর মান শূন্য হইলে প্রদত্ত রাশিমালার শূন্য হয়, তবে $x - y$ উহার একটি গুণনীয়ক হইবে। $x - y = 0$, $\therefore$ $x = y$.

এক্ষণে প্রদত্ত রাশিমালা $= (ax+bx)(bx+cx)(cx+ax)$

$-(ax+bx)(bx+cx)(cx+ax) = 0$ [y এর স্থানে x বসাইয়া]

$\therefore$ $x - y$ ঐ রাশিমালার একটি উৎপাদক।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে $a-b$, $b-c$, $c-a$ প্রত্যেকটি ঐ রাশিমালার গুণনীয়ক।

15. বিভাজ্যতা বিষয়ক কতিপয় উপপাদ্য

উপপাদ্য 1. n যে কোন অখণ্ড ধনরাশি (যুগ্ম বা অযুগ্ম) হইলে, $a^n - b^n$ রাশিটি $a - b$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

প্রমাণ : মনে কর, $a^n - b^n$ কে $a - b$ দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল Q এবং a-বর্জিত ভাগশেষ R হইবে।

$\therefore$ $a^n - b^n = (a-b) \times Q + R$ (ইহা একটি অভেদ)

$\because$ R ভাগশেষটি a-বর্জিত, $\therefore$ a এর মান যাহাই হউক না কেন, তাহাতে R এর মান পরিবর্তিত হইবে না। Qটি a-বর্জিত না হওয়ায় aএর মান পরিবর্তিত হইলে Qএর মান পরিবর্তিত হইবে।

মনে কর, a এর মান b ধরিলে Q এর মান Q' হয়।

এক্ষণে উক্ত অভেদে a এর স্থানে b লিখিয়া পাই

$$b^n - b^n = (b-b) \times Q' + R = 0 \times Q' + R = R$$

$\therefore$ $R = b^n - b^n = 0$. অতএব $a^n - b^n$, $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য।

[দ্রষ্টব্য : (i) $\frac{a^n - b^n}{a-b} = \frac{a-b}{a-b} = 1$ (যদি $n=1$ হয়)

(ii) $\frac{a^n - b^n}{a-b} = \frac{a^2 - b^2}{a-b} = a+b$ (যদি $n=2$ হয়)

(iii) $\frac{a^n - b^n}{a-b} = \frac{a^3 - b^3}{a-b} = a^2 + ab + b^2$ (যদি $n=3$ হয়

(iv) সাধারণভাবে $\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}.b + a^{n-3}.b^2 + \cdots\cdots + b^{n-1}$.

উপপাদ্য 2. n যে কোন যুগ্ম পূর্ণধনসংখ্যা হইলে $a^n - b^n$ রাশি $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য হয়, কিন্তু n অযুগ্ম হইলে বিভাজ্য হইবে না।

(পূর্ব উপপাদ্যের ন্যায় এখানে লেখা যায়)

$$a^n - b^n = (a+b) \times Q + R \text{ (অভেদে)।}$$

$\because$ R ভাগশেষটি a-বর্জিত, $\therefore$ a এর কোন মানে R পরিবর্তিত হইবে না। উক্ত অভেদে a এর স্থানে $-b$ লিখিয়া পাই

$$(-b)^n - b^n = (-b+b) \times Q' + R = 0 \times Q' + R = R.$$

এক্ষণে, n যুগ্ম সংখ্যা হইলে $(-b)^n = b^n$ হইবে এবং সেস্থলে

$(-b)^n - b^n = b^n - b^n = 0$ হইবে, সুতরাং তখন $R = 0$ হইবে।

অতএব n যুগ্ম পূর্ণধনসংখ্যা হইলে $a^n - b^n$, $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য হয়।

আবার, যদি n অযুগ্ম সংখ্যা হয়, তবে $(-b)^n = -b^n$ হইবে এবং তখন $(-b)^n - b^n = -b^n - b^n = -2b^n$ হইবে বলিয়া R এর মান শূন্য হইবে না। অতএব, n অযুগ্ম হইলে $a+b$ দ্বারা $a^n - b^n$ বিভাজ্য হইবে না।

উপপাদ্য 3. n যে-কোন অযুগ্ম পূর্ণ ধনসংখ্যা হইলে $a+b$ দ্বারা a^n+b^n বিভাজ্য হয়; কিন্তু n যুগ্ম হইলে বিভাজ্য হয় না।

(পূর্বের ন্যায়) $a^n+b^n=(a+b)\times Q+R$ (ইহা একটি অভেদ)।

[illegible]র স্থানে $-b$ লিখিয়া পাই

$$(-b)^n+b^n=(-b+b)\times Q'+R=0\times Q'+R=R.$$

এক্ষণে, n অযুগ্ম হইলে $(-b)^n=-b^n$ হইবে এবং সেস্থলে

$R=(-b)^n+b^n=-b^n+b^n=0$ হইবে; সুতরাং n অযুগ্ম পূর্ণধনসংখ্যা হইলে a^n+b^n, $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য হয়।

আবার n যুগ্ম সংখ্যা হইলে $(-b)^n=b^n$ হইবে এবং তখন

$R=(-b)^n+b^n=b^n+b^n=2b^n$ হইবে, কিন্তু 0 হইবে না।

অতএব n যুগ্ম হইলে a^n+b^n, $a+b$ দ্বারা বিভাজ্য নহে।

উপপাদ্য 4. n যুগ্ম বা অযুগ্ম যে কোন সংখ্যাই হউক-না কেন a^n+b^n কখন $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য হয় না।

(পূর্বের ন্যায়) $a^n+b^n=(a-b)\times Q+R$ (অভেদে সমান)

উক্ত অভেদে aর স্থানে b বসাইয়া পাই

$b^n+b^n=(b-b)\times Q'+R=0\times Q'+R=R.$

$\therefore\quad R=b^n+b^n=2b^n$, কিন্তু শূন্য নহে।

অতএব, a^n+b^n কখনই $a-b$ দ্বারা বিভাজ্য নহে।

উদাহরণমালা 4·

উদা. 1. Prove that 13^8-6^8 is divisible by 19.

$\because$ 8 অখণ্ড যুগ্ম সংখ্যা, $\therefore$ 13^8-6^8 রাশিটি $(13+6)$ বা 19 দ্বারা বিভাজ্য।

উদা. 2. If n be a positive integer, shew that $5^{3n}-3^{4n}$ is divisible by 44.

$$5^{3n}-3^{4n}=(5^3)^n-(3^4)^n=(125)^n-(81)^n.$$

এস্থলে n অখণ্ড ধন-সংখ্যা বলিয়া $(125)^n-(81)^n$ রাশিটি $(125-81)$ বা 44 দ্বারা বিভাজ্য।

1. 3. If n be a positive even integer prove that each of the last two digits in $4^{3n}-6^{2n}$ is zero and it is divisible by 100.

প্রদত্ত রাশি $=(4^3)^n-(6^2)^n=(64)^n-(36)^n$.

এক্ষণে, $\because$ n যুগ্ম অখণ্ড ধন-সংখ্যা, $\therefore$ $(64)^n-(36)^n$ ... $(64+36)$ বা 100 দ্বারা বিভাজ্য। আবার 100 প্রদত্ত রাশিটির একটি গুণনীয়ক বলিয়া ঐ রাশির শেষ দুই অঙ্ক 0 হইবে।

উদা. 4. Show that the last digit in 3^n+2^n, when n is an odd positive integer, must be 5.

$\because$ n অযুগ্ম অখণ্ড ধনসংখ্যা, $\therefore$ 3^n+2^n রাশিটি $3+2$ অর্থাৎ 5 দ্বারা বিভাজ্য। অতএব উক্ত রাশিটির শেষ অঙ্ক 5 অথবা 0 হইবে। কিন্তু যুগ্ম সংখ্যার যে কোন ঘাত যুগ্ম সংখ্যা এবং অযুগ্ম সংখ্যার যে কোন ঘাত অযুগ্ম সংখ্যা হয় বলিয়া 3^n অযুগ্ম এবং 2^n যুগ্ম হইবে। $\therefore$ উহাদের সমষ্টি অযুগ্ম হইবে। অতএব প্রদত্ত রাশির শেষ অঙ্ক 0 না হইয়া 5 হইবে।

উদা. 5. Prove that a number is divisible by 9, when the sum of its digits is divisible by 9. [P. U. 1915]

একক, দশক, প্রভৃতি স্থানে যথাক্রমে m, l প্রভৃতি ধরিয়া প্রদত্ত সংখ্যাকে সাধারণভাবে $p.10^n+q.10^{n-1}+r.10^{n-2}+\cdots+l.10+m$ এই আকারে প্রকাশ করা যায়। ইহাকে 9 বা $(10-1)$ দ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগশেষ থাকে তাহা উক্ত রাশিমালায় 10এর স্থানে 1 বসাইয়া পাওয়া যায়।

অতএব, ঐ ভাগশেষ $=p(1)^n+q(1)^{n-1}+\cdots+l.1+m$
$$=p+q+\cdots+l+m.$$

অতএব, যদি ঐ ভাগশেষটি অর্থাৎ $p, q, r, \cdots l, m$ অঙ্কগুলির সমষ্টি 9 দ্বারা বিভাজ্য হয়, তবে প্রদত্ত সংখ্যাটিও 9 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

[অন্য প্রণালী।] সংখ্যাটি এক অঙ্কবিশিষ্ট হইলে তাহা অবশ্যই 9 হইবে, সুতরাং তাহা 9 দ্বারা বিভাজ্য। মনে কর, সংখ্যাটি দুই অঙ্কবিশিষ্ট এবং y দশক স্থানীয় ও x একক স্থানীয় অঙ্ক। $\therefore$ সংখ্যাটি $=10y+x$.

এক্ষণে দেখ $(10y+x)\div 9=\dfrac{9y+y+x}{9}=y+\dfrac{y+x}{9}$.

অতএব $(x+y)$ যদি 9 দ্বারা বিভাজ্য হয় অর্থাৎ অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি যদি 9 দ্বারা বিভাজ্য হয়, তবে সংখ্যাটি (অর্থাৎ $10y+x$)টি 9 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

দুইএর অধিক অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা হইলেও এইভাবে দেখান যায় যে উক্ত নিয়মটি [illegible] হইতেছে।

উদা. 6. Show that if the difference between the sums of the digits in the odd and even places of a number is zero or divisible by 11, the number i[illegible] is divisible by 11.

মনে কর, সংখ্যাটি 4 অঙ্কের এবং প্রথম হইতে স্থানীয় অঙ্কগুলি যথাক্রমে x, y, z ও p. অতএব, সংখ্যাটি হইল $1000x+100y+10z+p$.

$$\text{এক্ষণে, } \frac{1000x+100y+10z+p}{11}$$

$$=90x+9y+\frac{10x+10z+y+p}{11}$$

$$=90x+9y+x+z+\frac{-x-z+y+p}{11}$$

$$=91x+9y+z+\frac{(y+p)-(x+z)}{11}.$$

অতএব, দেখা যায় যে $(y+p)-(x+z)$ যদি 0 হয় অথবা 11 দ্বারা বিভাজ্য হয়, তবে প্রদত্ত সংখ্যাটিও 11 দ্বারা বিভাজ্য হইবে। অনুরূপে, অঙ্কসংখ্যা অধিক হইলেও ঐ নিয়মের সত্যতা সিদ্ধ হইবে।

উদা. 7. Find the continued product of
$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$.

মনে কর, নির্ণেয় গুণফল $=x$.

অতএব, $x=(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$.

উভয় পক্ষকে $(a-b)$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$(a-b)x=(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$$
$$=(a^4-b^4)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$$
$$=(a^8-b^8)(a^8+b^8)=a^{16}-b^{16}.$$

$$\therefore\ x=\frac{a^{16}-b^{16}}{a-b}=a^{15}+a^{14}b+a^{13}b^2+a^{12}b^3+\cdots+ab^{14}+b^{15}.$$

উদা. 8. If n is any positive integer, shew that
$(ab)^n-(bc)^n+(cd)^n-(da)^n$ is divisible by $ab-bc+cd-da$
[M. U. 1878

$ab-bc+cd-da=b(a-c)-d(a-c)=(a-c)(b-d)$.
প্রদত্ত রাশিমালাটি aর একটি মূলদ অখণ্ড রাশি।
প্রদত্ত রাশিমালায় aর স্থানে c বসাইলে পাই
রাশিমালাটি $=(cb)^n-(bc)^n+(cd)^n-(dc)^n$
$=(bc)^n-(bc)^n+(cd)^n-(cd)^n=0$.
∴ ঐ রাশিমালাটি $a-c$ দ্বারা বিভাজ্য।

অনুরূপে, bর স্থানে d বসাইয়া প্রমাণ করা যায় যে রাশিমালাটি $b-d$ দ্বারা বিভাজ্য।

∴ প্রদত্ত রাশিমালাটি $(a-c)$ ও $(b-d)$এর গুণফলের দ্বারাও অর্থাৎ $ab-bc+cd-da$ দ্বারাও বিভাজ্য।

উদা. 9. Show that $a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)$ contains each of the factors $a-b$, $b-c$, $c-a$. [P. U. 1916]

$a-b$ এর মান শূন্য হইলে অর্থাৎ $a=b$ হইলে যদি প্রদত্ত রাশিমালার মান শূন্য হয়, তবে $a-b$ ঐ রাশিমালাটির উৎপাদক হইবে।

এক্ষণে প্রদত্ত রাশিতে aর স্থানে b বসাইয়া পাই

প্রদত্ত রাশিমালা $=b^n(b-c)+b^n(c-b)+c^n(b-b)$
$=b^n(b-c)-b^n(b-c)+c^n\times 0=0$,

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালাটির একটি গুণনীয়ক $a-b$ হইল।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে $b-c$ এবং $c-a$ ঐ রাশিমালার গুণনীয়ক।

উদা. 10. For what value of m will $2x^3+7x^2-x+m$ and $3x^2+10x-11$ leave the same remainder when divided by $x+4$?

প্রদত্ত রাশি দুইটিকে $x+4$ দিয়া ভাগ করিয়া কি ভাগশেষ থাকে তাহা পাওয়া যাইবে ঐ রাশিদ্বয়ে xএর মান -4 বসাইয়া।

∴ প্রথম রাশি হইতে ভাগশেষ $=2(-4)^3+7(-4)^2-(-4)+m$
$=-128+112+4+m=-12+m$.

দ্বিতীয় রাশি হইতে ভাগশেষ $= 3(-4)^2 + 10(-4) - 11$
$= 48 - 40 - 11 = -3.$

ভাগশেষ দুইটি সমান, $\therefore \quad -12 + m = -3, \quad \therefore \quad m = 9.$

Exercise 3

1. If $f(a) \equiv 2a^3 - 3a^2 + 5a + 6$, find the value of
(i) $f(2)$, (ii) $f(-1$, (iii) $f(-3)$, (iv) $f(n)$.

2. Find without actual division, the remainder in each of the following :—

(i) $(x^3 + 2x^2 - 3x + 4) \div (x - 3)$
(ii) $(2a^3 - 3a^2 + 5a + 7) \div (a + 2)$
(iii) $(5x^3 + 9x^2 + 10) \div (x + 3)$
(iv) $(3a^4 - 2a^3 + 5a^2 + a - 36) \div (a - 4)$
(v) $(4x^3 + 3x^2 - 5x - 6) \div (2x + 1)$

3. Show that the first expression is exactly divisible by the second :—

(i) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6,\ x - 2$
(ii) $x^{12} - 1,\ x - 1$
(iii) $2x^3 + 3x^2 - 5x + 12,\ x + 3$
(iv) $15x^3 - 4x^2 + 15x + 6,\ 3x + 1$
(v) $6x^3 - 13x^2y + 8xy^2 - 3y^3,\ 2x - 3y$
(vi) $a^{19} + b^{19},\ a + b.$

4. Show that $625x^4 - 16$ is exactly divisible by $5x - 2$. [P. U. '21]

5. Show that $(ax + by)^3 + (bx + ay)^3$ is divisible by $a + b$ and also by $x + y$. [C. U. '21]

6. For what value of m is $x^3 + 6x^2 + 10x + m$ exactly divisible by $x + 3$?

7. If $x-2$ is a factor of $120x^3-167x^2-ax+56$, find the value of a. [D. U. 1925]

8. If $x^2-3ax+b^2$ is exactly divisible by $x-a$, show that $2a^2=b^2$.

9. If $2x^3-7x^2+5x+p$ and $3x^2-11x+17$ leave the same remainder when divided by $x-3$, find the value of p.

10. If n is a positive integer, show that 9^n-1 is always divisible by 8.

11. Shew that $2x+3$ is a factor of $6x^2+7x-3$.

12. Prove that $3^{4n}-4^{3n}$ is divisible by 17, if n be a positive integer.

13. If n be a positive even integer, shew that each of the last two digits in $2^{6n}-6^{2n}$ is zero.

14. If n be a positive integer, shew that the last digit in $3^{2n+1}+2^{2n+1}$ is 5.

15. Find the continued product of $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$.

16. Find the condition that $pa^n+qa^{n-1}+ra^{n-2}+\cdots+la+m$ is divisible by $a-1$.

17. Find the condition that x^2+px+q and $x^2+p'x+q'$ may have a common factor of the form $x+a$.

18. If $x+p$ be the H.C.F. of x^2+ax+b and $x^2+a'x+b'$, shew that $p=\dfrac{b-b'}{a-a'}$.

19. Show that $a-b$, $b-c$ and $c-a$ are factors of $a^2(b-c)^3+b^2(c-a)^3+c^2(a-b)^3$.

20. If ax^3+bx^2+cx+d be divided by $x-p$ until the remainder is independent of x, find the remainder without actually performing the division.

Use the theorem to prove that $x^6+ax^5+cx^3+dx^2-1$ is divisible by $x+1$, if $a+c=d$. [A. U. 1913]

21. What must be the form of m so that $a^m - x^m$ may have both $a^n + x^n$ and $a^n - x^n$ for divisors, n being any positive integer. [M. U. 1875]

22. If n be a positive integer, show that $x^n(y-z)+y^n(z-x)+z^n(x-y)$ is exactly divisibe by $(x-y)(y-z)(z-x)$.

23. If $x-p$ be the H. C. F. of ax^2+bx+c and cx^2+ax+b, show that $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Simultaneous Equations (সহসমীকরণ)

উদাহরণমালা 5

উদা. 1. Solve $\left.\begin{array}{r}7x-3y=31\\ 9x-5y=41\end{array}\right\}$ [D. B. 1934]

$7x-3y=31 \cdots\cdots(1)$
$9x-5y=41 \cdots\cdots(2)$

(1)-কে 5 দ্বারা এবং (2)-কে 3 দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$35x-15y=155$
$27x-15y=123$

(বিয়োগ করিয়া) $8x = 32$, $\therefore\ x=4$.

এক্ষণে, (1)-এ xএর মান বসাইয়া পাই $28-3y=31$,

বা, $-3y=3$, $\therefore\ y=-1$. $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=4$, $y=-1$.

উদা. 2. Solve $x+2y=3=4x-y$. [C. U. 1917]

এখানে, $x+2y=3 \cdots\cdots(1)$
এবং $4x-y=3 \cdots\cdots(2)$

(2)-কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া পাই $8x-2y=6$
এবং $x+2y=3 \cdots\cdots(1)$

$\therefore$ (যোগ) $9x = 9$, $\therefore\ x=1$.

এক্ষণে (1) হইতে পাই $1+2y=3$, বা, $2y=2$, $\therefore\ y=1$.

$\therefore\ x=1, y=1$.

উদা. 3. Solve $x+5y=36$

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{5}{3}$$ [C. U. 1912]

$$x+5y=36\cdots\cdots(1),\quad \frac{x+y}{x-y}=\frac{5}{3}\cdots\cdots\cdots(2).$$

(2) হইতে পাই $5x-5y=3x+3y$,

বা, $2x-8y=0$, বা, $x-4y=0\cdots\cdots(3)$.

একণে $x+5y=36$

এবং $x-4y=0$

$\therefore$ (বিয়োগ) $9y=36$, $\therefore$ $y=4$.

একণে (1) হইতে $x+20=36$, $\therefore$ $x=36-20=16$.

$\therefore$ $x=16$, $y=4$.

উদা. 4. Solve
$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{x}+\frac{3}{y}&=2\cdots\cdots(1)\\ \frac{5}{x}+\frac{10}{y}&=5\frac{5}{6}\cdots\cdots(2)\end{aligned}\right\}$$

(1)-কে 5 দ্বারা এবং (2)-কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$\frac{10}{x}+\frac{15}{y}=10$$
$$\frac{10}{x}+\frac{20}{y}=\frac{35}{3}$$

(বিয়োগ) $-\frac{5}{y}=-\frac{5}{3}$ বা, $\frac{5}{y}=\frac{5}{3}$ $\therefore$ $y=3$.

একণে (1) হইতে, $\frac{2}{x}+\frac{3}{3}=2$, বা, $\frac{2}{x}=2-1=1$, $\therefore$ $x=2$.

অতএব, $x=2$, $y=3$.

উদা. 5. Solve $\frac{x+y}{xy}=2$, $\frac{x-y}{xy}=1$. [D. B. '31]

$$\frac{x+y}{xy}=2\cdots\cdots(1),\quad \frac{x-y}{xy}=1\cdots\cdots(2).$$

(1) হইতে, $\frac{x}{xy}+\frac{y}{xy}=2$, বা, $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=2\cdots\cdots(3)$

(2) হইতে, $\frac{x}{xy}-\frac{y}{xy}=1$, বা, $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=1\cdots\cdots(4)$

(3)+(4) করিয়া পাই, $\frac{2}{y}=3$,

বা, $3y=2$ (বজ্রগুণন) $\therefore \quad y=\frac{2}{3}$.

আবার, (3) – (4) করিয়া পাই, $\frac{2}{x}=1$, $\therefore \quad x=2$.

অতএব, $x=2$, $y=\frac{2}{3}$.

উদা. 6. Solve $23x+17y=63\cdots\cdots(1)$
$17x+23y=57\cdots\cdots(1)$

(1)+(2) করিয়া পাই, $40x+40y=120$,

বা, $x+y=3\cdots\cdots(3)$ [উভয়পক্ষকে 40 দিয়া ভাগ করিয়া]

আবার, (1) – (2) করিয়া পাই $6x-6y=6$,

বা, $x-y=1\cdots\cdots(4)$.

এক্ষণে, (3)+(4) করিয়া পাই $2x=4$, $\therefore \quad x=2$
এবং (3) – (4) করিয়া পাই $2y=2$, $\therefore \quad y=1$

উদা. 7. Solve $\left.\begin{array}{l}\frac{x+2}{7}+\frac{y-x}{4}=2x-8\cdots\cdots(1)\\ \frac{2y-3x}{3}+2y=3x+4\cdots\cdots(2)\end{array}\right\}$ [P. U. 1892]

(1)-কে 28 দিয়া গুণ করিয়া পাই,

$4x+8+7y-7x=56x-224$, বা, $-59x+7y=-232\cdots(3)$

(2)-কে 3 দ্বারা গুণ করিয়া পাই $2y-3x+6y=9x+12$,

বা, $8y-12x=12$, বা, $-3x+2y=3\cdots\cdots(4)$.

এক্ষণে (3)-কে 2 দ্বারা এবং (4)-কে 7 দ্বারা গুণ করিলে পাই

$$\begin{array}{rl}-118x+14y= & -464\\ -21x+14y= & 21\\ \hline\end{array}$$

(বিয়োগ) $-97x=-485$, $\therefore \quad x=\frac{-485}{-97}=5$.

এখন (4) হইতে, $-15+2y=3$, বা, $2y=18$, $\therefore \quad y=9.$

অতএব, $x=5,\ y=9.$

উদা. 8. Solve $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=a+b\cdots\cdots(1)\\[2mm] \dfrac{x}{a^2}+\dfrac{y}{b^2}=2\cdots\cdots(2)\end{array}\right\}$

(1)-কে a দ্বারা এবং (2)-কে a^2 দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$x+\frac{a}{b}y=a^2+ab\cdots\cdots(3)$$

$$\text{এবং } x+\frac{a^2}{b^2}y=2a^2\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\therefore \quad (\text{ বিয়োগ }) \quad \frac{ab-a^2}{b^2}\,y=ab-a^2,$$

$$\therefore \quad y=\frac{(ab-a^2)\times b^2}{(ab-a^2)}=b^2.$$

একণে (3) হইতে $x+\dfrac{a}{b}\times b^2=u^2+ab$ [y-এর মান বসাইয়া]

বা, $x+ab=a^2+ab$, $\therefore \quad x=a^2$. অতএব, $x=a^2,\ y=b^2.$

উদা. 9. Solve $\left.\begin{array}{rl}x+2y+3z= & 20\cdots(1)\\ 2x+3y-5z= & -7\cdots(2)\\ 4x-5y+7z= & 21\cdots(3)\end{array}\right\}$ [C. U. 1898]

(1)-কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$\begin{array}{rrl} & 2x+4y+6z= & 40\\ \text{এবং (2) হইল} & 2x+3y-5z= & -7\\ \hline \therefore\ (\text{ বিয়োগ }) & y+11z= & 47\cdots(4)\end{array}$$

আবার, (1)-কে 4 দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$\begin{array}{rl} & 4x+8y+12z=80\\ \text{এবং (3) হইল} & 4x-5y+\ \ 7z=21\\ \hline \therefore\ (\text{ বিয়োগ }) & 13y+\ \ 5z=59\cdots(5)\end{array}$$

একণে (4)-কে 13 দিয়া গুণ করিয়া পাই,

$$13y+143z=611$$

এবং $13y+\ \ 5z=\ 59 \quad \cdots(5)$

$\therefore$ (বিয়োগ) $\quad 138z=552, \quad \therefore \quad z=\frac{552}{138}=4.$

এখন (4) হইতে $y+44=47, \quad \therefore \quad y=47-44=3.$

আবার, (1) হইতে $x+6+12=20, \quad \therefore \quad x=20-18=2.$

$\therefore \quad x=2,\ y=3,\ z$[illegible]

উদা. 10. Solve $\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ y+z=7 \\ z+x=6 \end{array}\right\}$

$$x+y=5 \cdots(1)$$
$$y+z=7 \cdots(2)$$
$$z+x=6 \cdots(3)$$

$\therefore$ (যোগ) $2(x+y+z)=18.$

$\therefore \quad x+y+z=9\cdots(4)$

একণে, $(4)-(1)$ করিলে $z=9-5=4,$

$(4)-(2)$ করিলে $x=9-7=2,$

এবং $(4)-(3)$ করিলে $y=9-6=3, \quad \therefore \quad x=2,\ y=3,\ z=4.$

উদা. 11. Solve $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=6 \quad \cdots\cdots(1) \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=7 \quad \cdots\cdots(2) \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=5 \quad \cdots\cdots(3) \end{array}\right\}$

$\therefore$ (যোগ করিয়া) $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=18,$

$$\therefore \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=9. \quad \cdots\cdots(4)$$

একণে, $(4)-(1)$ করিয়া পাই $\frac{1}{z}=3,$ বা, $3z=1, \qquad z=\frac{1}{3}$

$(4)-(2)$,, ,, $\frac{1}{x}=2,$ বা, $2x=1, \qquad x=\frac{1}{2}$

এবং $(4)-(3)$,, ,, $\frac{1}{y}=4,$ বা, $4y=1, \qquad y=\frac{1}{4}$

অতএব, $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{4},\ z=\frac{1}{3}.$

উদা. 12. Solve $\frac{x+y}{xy}=\frac{3}{2}\cdots(1)$, $\frac{y+z}{yz}=\frac{5}{6}\cdots(2)$, $\frac{z+x}{zx}=1\frac{1}{3}\cdots(3)$

(1) হইতে পাই $\frac{x}{xy}+\frac{y}{xy}=\frac{3}{2}$, বা, $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{3}{2}\cdots\cdots(4)$

(2) " " $\frac{y}{yz}+\frac{z}{yz}=\frac{5}{6}$, বা, $\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}\cdots\cdots(5)$

(3) " " $\frac{z}{zy}+\frac{x}{zx}=\frac{4}{3}$, বা, $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{4}{3}\cdots\cdots(6)$

(যোগ করিয়া) $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{11}{3}$,

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{6}\cdots\cdots(7)$.

এক্ষণে, (7) − (4) করিয়া পাই $\frac{1}{z}=\frac{11}{6}-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}$, $\therefore z=3$

(7) − (5) " " $\frac{1}{x}=\frac{11}{6}-\frac{5}{6}=1$, $\therefore x=1$

এবং (7) − (6) " " $\frac{1}{y}=\frac{11}{6}-\frac{4}{3}=\frac{1}{2}$, $\therefore y=2$

অতএব, $x=1$, $y=2$, $z=3$.

উদা. 13. Solve $\left.\begin{array}{l}3x+4y=5xy\cdots\cdots(1)\\ 3y+5z=6yz\cdots\cdots(2)\\ 2z+3x=2zx\cdots\cdots(3)\end{array}\right\}$

(1)-কে xy দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$\frac{3x}{xy}+\frac{4y}{xy}=5$, বা, $\frac{3}{y}+\frac{4}{x}=5\cdots\cdots(4)$

অনুরূপে, (2)-কে yz দ্বারা ভাগ করিয়া পাই

$\frac{3}{z}+\frac{5}{y}=6\cdots\cdots(5)$

(3)-কে zx দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $\frac{2}{x}+\frac{3}{z}=2\cdots\cdots(6)$

এক্ষণে, (5) – (6) করিয়া পাই

$$\frac{5}{y}-\frac{2}{x}=4\cdots\cdots(7)$$

আবার, (4) × 1 এবং (7) × 2 করিয়া পাই

$$\frac{3}{y}+\frac{4}{x}=5$$

এবং $\frac{10}{y}-\frac{4}{x}=8$

(যোগ) $\frac{13}{y}=13,\quad$ বা, $\quad 13y=13,\quad \therefore\quad y=1.$

এক্ষণে, (4) হইতে পাই $3+\frac{4}{x}=5,\quad$ বা, $\quad\frac{4}{x}=2,$

বা, $2x=4,\qquad \therefore\quad x=2.$

এবং (5) হইতে পাই $\frac{3}{z}+5=6,\qquad$ বা, $\quad\frac{3}{z}=1,\qquad \therefore\quad z=3.$

$\therefore\quad x=2,\ y=1,\ z=3.$

উদা. 14. Solve $\frac{xy}{x+y}=\frac{6}{5},\ \frac{yz}{y+z}=\frac{12}{7}$ and $\frac{zx}{z+x}=\frac{4}{3}.$

[এখানে সমীকরণগুলিকে উল্টাইয়া যথাক্রমে $\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{6},\ \frac{y+z}{yz}=\frac{7}{12},$ $\frac{z+x}{zx}=\frac{3}{4}$ এইভাবে লেখা যায়। তারপর 12নং উদাহরণের মত সমাধান কর।

উত্তর : $x=2,\ y=3,\ z=4$]

উদা. 15. Solve $\frac{x+y}{xy}=\frac{y+z}{yz}=\frac{z+x}{zx}=\frac{2}{5}.$

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{2}{5},\ \text{বা},\ \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{2}{5}\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{y+z}{yz}=\frac{2}{5},\ \text{বা},\ \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{2}{5}\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{z+x}{zx}=\frac{2}{5},\ \text{বা},\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{5}\cdots\cdots(3)$$

(যোগ) $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{6}{5},\ \therefore\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{5}\cdots(4)$

এখন, (4)−(1) করিয়া পাই $\frac{1}{z}=\frac{1}{5}$, $\therefore \quad z=5$

(4)−(2) „ „ $\frac{1}{x}=\frac{1}{5}$, $\therefore \quad x=5$

(4)−(3) „ „ $\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$, $\therefore \quad y=5$

অতএব, $x=y=z=5$.

উদা. 16. Solve $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, $a^2x+b^2y+c^2z=a^3+b^3+c^3$.

এখানে, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$ (মনে কর)

$\therefore \quad x=ak,\ y=bk,\ z=ck \cdots\cdots$(A)

অতএব, দ্বিতীয় সমীকরণটি হইতে পাই $a^3k+b^3k+c^3k=a^3+b^3+c^3$,

বা, $(a^3+b^3+c^3)k=a^3+b^3+c^3$,

$$\therefore \quad k=\frac{a^3+b^3+c^3}{a^3+b^3+c^3}=1.$$

অতএব, k-এর মান বসাইয়া (A) হইতে পাই $x=a$, $y=b$, $z=c$.

উদা. 17. Solve $a(x+y)=b(x-y)=2ab$. [C. U. 1930]

এখানে, $a(x+y)=2ab \cdots\cdots(1)$

এবং $b(x-y)=2ab \cdots\cdots(2)$

(1) হইতে $x+y=2b$ (উভয় পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করিয়া)$\cdots\cdots$ (3)

(2) „ $x-y=2a$ („ „ b „ „ „)

$\therefore$ (যোগ) $2x=2(a+b)$, $\therefore \quad x=a+b$.

এক্ষণে, (3) হইতে $a+b+y=2b$, $\therefore \quad y=2b-b-a=b-a$.

অতএব, $x=a+b$, $y=b-a$.

উদা. 18. Solve $xy=12 \ldots(1)$, $yz=20 \ldots(2)$ and $zx=15 \ldots(3)$

সমীকরণ তিনটি গুণ করিলে পাই $x^2y^2z^2=12\times20\times15=3600$.

$\therefore \quad xyz \sqrt{3600}=\pm 60 \cdots(4)$.

এক্ষণে, (4)÷(1) করিয়া $\frac{xyz}{xy}=\pm\frac{60}{12}$, বা, $z=\pm5$.

অনুরূপে (4)÷(2) করিয়া $x=\pm3$ এবং (4)÷(3) করিয়া $y=\pm4$.

অতএব, $x=\pm3$, $y=\pm4$, $z=\pm5$.

16. বজ্রগুণন প্রণালী (Method of cross-multiplication) :

যদি তিনটি সমীকরণের মধ্যে দুইটির মান 0 হয়, তবে এই প্রণালীতে সমাধান সহজ হয়। সেই দুইটি সমীকরণ লইয়া এইভাবে লিখিবে :

$$\frac{x}{(y\text{এর সহগ} \times z\text{এর সহগ}) - (z\text{এর সহগ} \times y\text{এর সহগ})}$$

$$=\frac{y}{(z\text{এর সহগ} \times x\text{এর সহগ}) - (x\text{এর সহগ} \times z\text{এর সহগ})}$$

$$=\frac{z}{(x\text{এর সহগ} \times y\text{এর সহগ}) - (y\text{এর সহগ} \times x\text{এর সহগ})}$$

কিন্তু এখানে মনে রাখিতে হইবে যে, প্রত্যেক বন্ধনীর মধ্যে প্রথমে যার সহগ আছে সর্বদা উপরের সমীকরণ হইতে তাহা লইতে হইবে এবং × চিহ্নের পর যার সহগ আছে, সর্বদা তাহা নীচের সমীকরণ হইতে লইতে হইবে। পরবর্তী উদাহরণ হইতে ইহা বুঝিয়া লও।

দ্রষ্টব্য : উপরের প্রণালীটি সম্বন্ধে নিম্নে প্রমাণ দেখান হইতেছে।

$ax+by+cz=0 \cdots\cdots(1)$ এবং $a_1x+b_1y+c_1z=0\cdots\cdots(2)$ এই সমীকরণ দুইটি লওয়া হইল।

(1)-কে c_1 দ্বারা এবং (2)-কে c দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$ac_1x+bc_1y+cc_1z=0 \quad \cdots (3)$$

এবং $$a_1cx+b_1cy+cc_1z=0 \cdots (4)$$

এক্ষণে (4)−(3) করিয়া পাই $(a_1c-ac_1)x+(b_1c-bc_1)y=0$

বা, $(a_1c-ac_1)x=(bc_1-b_1c)y$

$$\therefore \quad \frac{x}{bc_1-b_1c}=\frac{y}{a_1c-ac_1} \cdots (5)$$

আবার, (1)-কে a_1 এবং (2)-কে a দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$aa_1x+a_1by+a_1cz=0 \cdots (6)$$

এবং $$aa_1x+ab_1y+ac_1z=0 \cdots (7)$$

এক্ষণে (7)−(6) করিয়া পাই $(ab_1-a_1b)y+(ac_1-a_1c)z=0$,

বা, $(ab_1-a_1b)y=(a_1c-ac_1)z$

$\therefore \quad \dfrac{y}{a_1c-ac_1}=\dfrac{z}{ab_1-a_1b}$ ......(8)

$\therefore$ (5) ও (8) হইতে পাই $\dfrac{x}{bc_1-b_1c}=\dfrac{y}{a_1c-ac_1}=\dfrac{z}{ab_1-a_1b}$.

উদা. 19. Solve
$$\left.\begin{aligned} x-2y+z&=0 \text{......(1)}\\ 3x+6y-5z&=0 \text{......(2)}\\ 2x+3y+4z&=20 \text{......(3)}\end{aligned}\right\}$$

(1) ও (2) হইতে বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা পাই

$$\frac{x}{(-2\times-5)-(1\times6)}=\frac{y}{(1\times3)-(1\times-5)}=\frac{z}{(1\times6)-(-2\times3)}$$

বা, $\dfrac{x}{10-6}=\dfrac{y}{3+5}=\dfrac{z}{6+6}$, বা, $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{8}=\dfrac{z}{12}$,

বা, $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}=k$ (মনে কর)

সুতরাং $x=k,\ y=2k,\ z=3k$ .....(A)

এখন, (3) হইতে পাই $2k+6k+12k=20$,

বা, $20k=20, \quad \therefore \quad k=1.$

$\therefore$ (A) হইতে k এর মান বসাইয়া পাই $x=1,\ y=2,\ z=3$.

উদা. 20. Solve
$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0 \text{ .....(1)}\\ ax+by+cz&=0 \text{......(2)}\\ \frac{x}{b-c}+\frac{y}{c-a}+\frac{z}{a-b}&=3 \text{......(3)}\end{aligned}\right\}$$

(1) ও (2) হইতে বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা পাওয়া যায়

$\dfrac{x}{c-b}=\dfrac{y}{a-c}=\dfrac{z}{b-a}$ বা, $\dfrac{x}{-(b-c)}=\dfrac{y}{-(c-a)}=\dfrac{z}{-(a-b)}$

বা, $\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}=k$ (মনে কর)

$\therefore \quad x=k(b-c),\ y=k(c-a),\ z=k(a-b)$......(4).

একণে (3) হইতে পাই $\dfrac{k(b-c)}{b-c}+\dfrac{k(c-a)}{c-a}+\dfrac{k(a-b)}{a-b}=3$,

বা, $k+k+k=3$, বা, $3k=3$, $\therefore \quad k=1.$

অতএব, (4) হইতে $x=b-c,\ y=c-a,\ z=a-b$.

উদা. 21. Solve
$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=0\cdots\cdots(1)\\ bcx+cay+abz=0\cdots\cdots(2)\\ ax+by+cz+(b-c)(c-a)(a-b)=0\cdots\cdots(3)\end{array}\right\}$$

এখানে (3)টিকে $ax+by+cz=-(b-c)(c-a)(a-b)\cdots(4)$ লিখা যায়।

(1) ও (2) হইতে বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা পাই

$$\frac{x}{ab-ca}=\frac{y}{bc-ab}=\frac{z}{ca-bc}$$

বা, $\frac{x}{a(b-c)}=\frac{y}{b(c-a)}=\frac{z}{c(a-b)}=k$ (মনে কর)

$\therefore \quad x=a(b-c)k,\ y=b(c-a)k,\ z=c(a-b)k\cdots(A)$

এক্ষণে, (4) হইতে x, y, zএর মান বসাইয়া পাই

$a^2(b-c)k+b^2(c-a)k+c^2(a-b)k=-(b-c)(c-a)(a-b)$

বা, $k\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}=-(b-c)(c-a)(a-b)$

বা, $-(a-b)(b-c)(c-a)\ k=-(b-c)(c-a)(a-b)$

$\therefore \quad k=1.$

অতএব, (A) হইতে $x=a(b-c)$, $y=b(c-a)$, $z=c(a-b)$.

উদা. 22. Solve
$$\left.\begin{array}{l} 24x=15y=40z\cdots(1)\\ \text{and } 3x+y+2z=29\cdots(2)\end{array}\right\}$$

(1)-এর প্রত্যেক পদকে 24, 15, ও 40এর ল. সা. গু. 120 দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $\frac{x}{5}=\frac{y}{8}=\frac{z}{3}=k$ (মনে কর)

$\therefore \quad x=5k,\ y=8k,\ z=3k\cdots\cdots(A)$

এক্ষণে, (2) হইতে পাই $15k+8k+6k=29$,

বা, $29k=29$, $\quad\therefore\quad k=1$.

অতএব, (A) হইতে $x=5$, $y=8$, $z=3$.

উদা. 23. Solve
$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=a+b+c\cdots\cdots(1)\\ ax+by+cz=a^2+b^2+c^2\cdots\cdots(2)\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3\cdots\cdots(3)\end{array}\right\}$$

(1) হইতে $(x-a)+(y-b)+(z-c)=0 \cdots\cdots(4)$

(2) হইতে $(ax-a^2)+(by-b^2)+(cz-c^2)=0,$

বা $a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0 \cdots\cdots(5)$

(4) ও (5) হইতে বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা পাই

$$\frac{x-a}{c-b}=\frac{y-b}{a-c}=\frac{z-c}{b-a}=k \text{ (মনে কর)}$$

অতএব, $x-a=k(c-b),\ y-b=k(a-c),\ z-c=k(b-a) \cdots$(A)

এক্ষণে, (3) হইতে পক্ষান্তর করিয়া পাই

$\frac{x}{a}-1+\frac{y}{b}-1+\frac{z}{c}-1=0$, বা, $\frac{x-a}{a}+\frac{y-b}{b}+\frac{z-c}{c}=0,$

বা, $\frac{k(c-b)}{a}+\frac{k(a-c)}{b}+\frac{k(b-a)}{c}=0$

[$x-a,\ y-b,\ z-c$-এর মান বসাইয়া]

বা, $k\left(\frac{c-b}{a}+\frac{a-c}{b}+\frac{b-a}{c}\right)=0, \quad \therefore\ k=0.$

অতএব, (A) হইতে পাই, $\left.\begin{array}{ll} x-a=0, & \therefore\ x=a \\ y-b=0, & \therefore\ y=b \\ z-c=0, & \therefore\ z=c \end{array}\right\}$ (উত্তর)

উদা. 24. Solve $\left.\begin{array}{l} \frac{2}{x}+\frac{5}{y}-\frac{3}{z}=0 \cdots\cdots(1) \\ \frac{3}{x}-\frac{12}{y}+\frac{2}{z}=0 \cdots\cdots(2) \\ 4x+y+3z=4 \quad \cdots(3) \end{array}\right\}$

(1) হইতে $2.\frac{1}{x}+5.\frac{1}{y}-3.\frac{1}{z}=0$

(2) " $3.\frac{1}{x}-12.\frac{1}{y}+2\frac{1}{z}=0,$

উহা হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাওয়া যায়

$$\frac{\frac{1}{x}}{(5\times2)-(-3\times-12)}=\frac{\frac{1}{y}}{(-3\times3)-(2\times2)}=\frac{\frac{1}{z}}{(2\times-12)-(5\times3)}$$

বা, $\dfrac{\frac{1}{x}}{-26}=\dfrac{\frac{1}{y}}{-13}=\dfrac{\frac{1}{z}}{-39}$, বা, $\dfrac{\frac{1}{x}}{2}=\dfrac{\frac{1}{y}}{1}=\dfrac{\frac{1}{z}}{3}=k$ (মনে কর)

অতএব, $\frac{1}{x}=2k,\ \frac{1}{y}=k, \frac{1}{z}=3k,$

$$\text{বা, } x=\frac{1}{2k}, y=\frac{1}{k}, z=\frac{1}{3k} \cdots\cdots(A)$$

এক্ষণে, (3) হইতে পাই $4.\frac{1}{2k}+\frac{1}{k}+3.\frac{1}{3k}=4,$

$$\text{বা, } \frac{2}{k}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}=4, \text{ বা, } \frac{4}{k}=4, \quad \therefore \ k=1.$$

$\therefore$ (A) হইতে $x=\frac{1}{2}, y=1, z=\frac{1}{3}$.

উদা. 25. Solve $x(x+y+z)=6\cdots(1), y(x+y+z)=12\cdots(2)$
$z(x+y+z)=18\cdots\cdots(3)$.

সমীকরণ তিনটি যোগ করিয়া পাই $(x+y+z)(x+y+z)=36,$

বা, $(x+y+z)^2=36, \quad \therefore \ x+y+z=\pm6\cdots(4)$

এক্ষণে, (1)কে (4) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $x=\pm1$
(2)কে (4) " " $y=\pm2$ (উত্তর)
(3)কে (4) " " $z=\pm3$

উদা. 26. Solve $\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y-2}=3\cdots(1)\\ \dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{y-2}=5\cdots(2)\end{array}\right\}$ [A. U. '42]

(1)×2 করিয়া পাই

$$\frac{2}{x-1}+\frac{2}{y-2}=6$$

$$\text{এবং } \frac{2}{x-1}+\frac{3}{y-2}=5\cdots\cdots(2)$$

(বিয়োগ করিয়া) $-\dfrac{1}{y-2}=1$, বা, $y-2=-1, \ \therefore \ y=2-1=1.$

এক্ষণে (1) হইতে $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{1-2}=3,$

বা, $\frac{1}{x-1}-1=3,$ বা, $\frac{1}{x-1}=4,$

বা, $4x-4=1,$ বা, $4x=5,$ $\therefore$ $x=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}.$

$\therefore$ $x=1\frac{1}{4},\ y=1.$

উদা. 27. In the cyclic quadrilateral ABCD, $\angle A=(2x+13)$ degrees, $\angle B=(2y-18)$ degrees, $\angle C=(y+31)$ degrees, $\angle D=(3x-29)$ degrees. Find the values of x and y.

[P. U. 1932]

$\because$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় $=2$ সমকোণ $=180$ ডিগ্রী,

$\therefore$ $\angle A+\angle C=180^\circ$ এবং $\angle B+\angle D=180^\circ$,

$\therefore$ $2x+13+y+31=180\cdots\cdots(1)$

এবং $3x-29+2y-18=180\cdots\cdots(2)$

(1) হইতে $2x+y=136\cdots\cdots(3)$

এবং (2) হইতে $3x+2y=227\cdots\cdots(4)$

(3) ও (4) সমাধান করিলে পাই $x=45,\ y=46.$

$\therefore$ xএর মান 45°, yএর মান 46°.

উদা. 28. Solve
$$\left.\begin{aligned} a(y+z)&=yz\cdots\cdots(1)\\ b(z+x)&=zx\cdots\cdots(2)\\ c(x+y)&=xy\cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}$$

(1) হইতে পাই $\frac{y+z}{yz}=\frac{1}{a},$ বা $\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}\cdots\cdots(4)$

(2) ,, ,, $\frac{z+x}{zx}=\frac{1}{b},$ বা $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b}\cdots\cdots(5)$

(3) ,, ,, $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{c},$ বা $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{1}{c}\cdots\cdots(6)$

$$\therefore\quad 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots(7)$$

এক্ষণে, (7) - (4) করিয়া পাই $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)=\frac{ac+ab-bc}{2abc}$

$$\therefore \quad x=\frac{2abc}{ab+ac-bc};$$

(7) - (5) „ $\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$,

$$\therefore \quad y=\frac{2abc}{ab+bc-ac};$$

এবং (7) - (6) „ „ $\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$,

$$\therefore \quad z=\frac{2abc}{bc+ac-ab}.$$

উদা. 29. Eliminate t from the equations

$x=t+\frac{1}{t}, \; y^2=t^2+\frac{1}{t^2}$. [D. B. '32]

এখানে $x^2=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2.t.\frac{1}{t}=t^2+\frac{1}{t^2}+2=y^2+2.$

অতএব, t বর্জন করিয়া সমীকরণটি হইল $x^2-y^2=2$.

Exercise 4

Solve :—

1. $\left.\begin{array}{r}3x+5y=69\\ x-2y=1\end{array}\right\}$ [C. U. '19]

2. $\left.\begin{array}{r}6x-7y=16\\ 9x-5y=35\end{array}\right\}$ [C. U. '22]

3. $\left.\begin{array}{r}\frac{x}{3}-\frac{2}{y}=1\\ \frac{x}{4}+\frac{3}{y}=3\end{array}\right\}$ [A. U. '23]

4. $\left.\begin{array}{r}x+y+z=1\\ 2x+3y+z=4\\ 4x+9y+z=16\end{array}\right\}$ [C. U. '11]

5. (a) $\left.\begin{array}{r}\frac{4}{x}+\frac{10}{y}=2\\ \frac{8}{x}+\frac{2}{y}=\frac{19}{20}\end{array}\right\}$

5. (b) $\left.\begin{array}{r}3x+4y=11\\ 5x-2y=1\end{array}\right\}$ [W. B. S. F. '53]

6. $\dfrac{2x+2y-3}{5}=\dfrac{3x-7y+4}{6}=\dfrac{8y-x+2}{7}$. [C. U. '14]

7. $\left.\begin{array}{l} y+z=6 \\ z+x=4 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$ [C. U. '18]

8. $\left.\begin{array}{l} 6y-x=1 \\ \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{3}{2} \end{array}\right\}$ [C. U. '31]

9. $\dfrac{x+y}{xy}=5$, $\dfrac{x-y}{xy}=9$ [C. U. '32]

10. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{5}{x}+3y=8 \\ \dfrac{4}{x}-10y=56 \end{array}\right\}$ [D. B. '39]

11. $\left.\begin{array}{l} 23x-24y=21 \\ 25x-16y=43 \end{array}\right\}$ [D. B. '36]

12. $\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{z+x}{zx}=3$

13. $\left.\begin{array}{l} x-2y+z=0 \\ 9x-8y+3z=0 \\ 2x+3y+5z=36 \end{array}\right\}$

14. $\left.\begin{array}{l} 6x=8y=10z \\ 3x-4y+z=12 \end{array}\right\}$

15. $xy=24$, $yz=42$, $zx=28$.

16. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=6a \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}=10a \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=-2a \end{array}\right\}$

16. (a) $\left.\begin{array}{l} 2x-5y-3z=0 \\ 3x+3y-z=0 \\ -x+2y+5z=11 \end{array}\right\}$

17. $\dfrac{7x+y}{5y-z}=\dfrac{11y-z}{6x-z}=\dfrac{5x-y}{z+1}=2$

18. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}, \\ ax+by+cz=a^2+b^2+c^2 \end{array}\right\}$

19. $\left.\begin{array}{l} ax+by+cz=0 \\ a^2x+b^2y+c^2z=0 \\ x+y+z+(a-b)(b-c)(c-a)=0 \end{array}\right\}$

20. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{5} \\ 4x+3y+z=30 \end{array}\right\}$

21. $\left.\begin{array}{l} x+y=3xy \\ y+z=5yz \\ z+x=4zx \end{array}\right\}$

(22) $\left.\begin{array}{l}\frac{3}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=0\\ \frac{5}{x}-\frac{6}{y}+\frac{2}{z}=0\\ 2x+3y+4z=6\end{array}\right\}$ [D. B. '33]

23. $\frac{x+ca}{b(c+a)}=\frac{y+bc}{a(b+c)}=\frac{z+ab}{c(a+b)}=\frac{x+y+z}{ab+bc+ca}$

[Hints : প্রথম তিনটি হইতে [illegible]ddendo পাই

$\text{Each}=\frac{x+y+z+ab+ac+bc}{2(ab+bc+ca)}=\frac{x+y+z}{ab+bc+ca}$

$\therefore\ \text{Each}=\frac{x+y+z+ab+bc+ca-x-y-z}{2(ab+bc+ca)-(ab+bc+ca)}=1.$

এক্ষণে, প্রত্যেকটি $=1$ ধরিয়া সমাধান কর।]

(24) $x(y+z)=5,\ y(z+x)=8,\ z(x+y)=9.$

25. $ax+by=1,\ bx+ay=\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}-1.$ [D. B. '51]

[Hints : সমীকরণ দুইটি যোগ করিয়া $x+y=\frac{a+b}{a^2+b^2}$ এবং বিয়োগ করিয়া $x-y=\frac{a-b}{a^2+b^2}$ হয়। এই দুইটি আবার যোগ ও বিয়োগ কর···]

26. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3,\ y+z=5yz,\ z+x=4xz.$ [A. U. '43]

27. $\left.\begin{array}{l}ax+by=c\\ bx+ay=1+c\end{array}\right\}$ [E. B. S. B. '52]

28. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\quad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\quad \frac{z}{c}+\frac{x}{a}=1.$ [U. U. '48]

[Hints : সমীকরণ তিনটি যোগ করিয়া পাই $2\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=3,$

$\therefore\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{3}{2}.$ ···]

(29) $\left.\begin{array}{l}3x+4y-11=0\\ 5y-6z=8\\ 7z-8x-13=0\end{array}\right\}$ [C. U. 1877]

30. $$\left.\begin{aligned} x+5y-4z&=5\\ 3x-2y+2z&=14\\ -10x+8y+z&=6 \end{aligned}\right\}$$ [C. U. 1867]

31. $$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}y&=12-\tfrac{1}{6}z\\ \tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{3}z-\tfrac{1}{6}x&=8\\ \tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{3}z&=10 \end{aligned}\right\}$$ [C. U. 1868]

32. $$\left.\begin{aligned} x-y-z&=-15\\ y+x+2z&=40\\ \text{[illegible]}\;5x-6y&=-150 \end{aligned}\right\}$$ [C. U. 1886]

33. $$\left.\begin{aligned} 5x-3y+16z&=0\\ 4x+7y&=6z\\ 3x-2y+19z&=9 \end{aligned}\right\}$$

34. $$\begin{aligned} x+y&=axy\\ z+x&=bzx\\ z+y&=cyz \end{aligned}$$

35. $$\left.\begin{aligned} y-px+p^2z&=p^3\\ y-qx+q^2z&=q^3\\ y-mx+m^2z&=m^3 \end{aligned}\right\}$$

Problems on Equations

17. অনেক বিবিধ প্রশ্ন Algebra-র সাহায্যে সহজে সমাধান করা যায়। প্রশ্নে যদি একের অধিক অজ্ঞাত রাশি থাকে, তবে তাহাদের স্থানে x, y, z প্রভৃতি ধরিয়া নিয়ে সমাধানগুলি দেখ।

উদাহরণমালা 6

উদা. 1. Twenty years ago a father was 4 times as old as his son and 4 years hence he will be twice as old as his son. What are their present ages ? [C. U. 1940]

মনে কর, পিতার ও পুত্রের বর্তমান বয়স যথাক্রমে x ও y বৎসর। প্রদত্ত সর্তদ্বয় হইতে পাই, $x-20=4(y-20)\cdots(1)$ এবং $x+4=2(y+4)\cdots(2)$.

(1) হইতে $x-4y=-60\cdots(3)$ এবং (2) হইতে $x-2y=4\cdots(4)$.

$(3)-(4)$ করিয়া পাই $-2y=-64$, $\therefore\ y=32$. আবার, (4) হইতে পাই $x=4+64=68$. $\therefore$ পিতার বয়স 68 বৎসর ও পুত্রের বয়স 32 বৎসর।

উদা. 2. Add 1 to the numerator and the denominator of a certain fraction and it reduces to $\frac{4}{5}$; subtract 5 from each and it reduces to $\frac{1}{2}$; find the fraction. [C. U. 1916]

মনে কর, ভগ্নাংশটি $\dfrac{x}{y}$.

প্রদত্ত সর্তদ্বয় হইতে পাই $\dfrac{x+1}{y+1}=\dfrac{4}{5}\cdots(1)$ এবং $\dfrac{x-5}{y-5}=\dfrac{1}{2}\cdots(2)$

(1) হইতে $5x+5=4y+4$, বা, $5x-4y=-1\cdots(3)$

এবং (2) হইতে $2x-10=y-5$, বা, $2x-y=5\cdots(4)$

এখন $(3)\times1$ ও $(4)\times4$ করিয়া পাই

$$\begin{aligned} 5x-4y&=-1\\ 8x-4y&=20 \end{aligned}$$

(বিয়োগ) $-3x=-21$. $\therefore\ x=7$, এবং (4) হইতে $14-y=5$,

বা, $-y=-9$, $\therefore\ y=9$. $\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\frac{7}{9}$.

উদা. 3. Find the fraction which reduces to $\frac{1}{2}$ when 1 is added to its denominator, and $\frac{1}{3}$ when 2 is subtracted from its numerator. [D. B. 1932]

মনে কর, ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$. প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই, $\frac{x}{y+1}=\frac{1}{2}\cdots(1)$ এবং $\frac{x-2}{y}=\frac{1}{3}\cdots(2)$. (1)হইতে $2x-y=1\cdots(3)$ এবং (2) হইতে $3x-y=6\cdots(4)$

(3) ও (4) সমীকরণদ্বয় সমাধান করিলে পাই $x=5,\ y=9$.

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\frac{5}{9}$.

উদা. 4. A says to B, "I am twice as old as you were when I was as old as you are." The sum of their present ages is 63. Find their ages. [A. U. '31]

মনে কর, A ও Bর বর্তমান বয়স যথাক্রমে x ও y বৎসর।

প্রদত্ত সর্তদ্বয় হইতে পাই $x+y=63\cdots\cdots(1)$

এবং $x=2\{y-(x-y)\}$*$\cdots\cdots$ (2)

(2) হইতে পাই $x=4y-2x$, বা, $3x-4y=0\cdots\cdots(3)$.

এখন (1) ও (3) সমাধান করিলে পাই $y=27$. $\therefore\ x=63-27=36$.

অতএব, A-র বয়স 36 বৎসর এবং B-র বয়স 27 বৎসর।

*[A অপেক্ষা Bর বয়স $(x-y)$ বৎসর কম। $\therefore$ A-র বয়স যখন y বৎসর ছিল তখন B-র বয়স ছিল $y-(x-y)$ বৎসর।]

উদা. 5. Nine chairs and 5 tables cost Rs. 90, while 5 chairs and 4 tables cost Rs. 61. Find the price of 6 chairs and 3 tables. [P. U. '30]

মনে কর, একখানি চেয়ারের মূল্য x টাকা এবং একটি টেবিলের মূল্য y টাকা। এখন প্রদত্ত সর্ত হইতে $9x+5y=90\cdots\cdots(1)$

এবং $5x+4y=61\cdots\cdots(2)$. সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া পাই $x=5$ এবং $y=9$.

$\therefore$ 6টি চেয়ার ও 3টি টেবিলের মূল্য $=5\times6$ টা.$+9\times3$টা.$=57$ টাকা।

উদা. 6. The area of a floor is 192 sq. ft. Had each of the sides been 2 ft. longer, the area would have been increased by 60 sq. ft. Find the sides of the floor. [C. U. 1924]

মনে কর, দৈর্ঘ্য x ফুট এবং প্রস্থ y ফুট। প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $xy=192\cdots(1)$ এবং $(x+2)(y+2)=192+60\cdots(2)$

(2) হইতে পাই $xy+2x+2y=248$,

বা, $192+2(x+y)=248$, বা, $2(x+y)=56$, বা $x+y=28\cdots(3)$.

এখন $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=28^2-4\times 192=16$,

∴ $x-y=4\cdots(4)$ (3) ও (4) সমাধান করিয়া পাই $x=16$, $y=12$.

∴ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=16$ ফুট, প্রস্থ $=12$ ফুট।

উদা. 7. The perimeter of a rectangular courtyard is 60 ft. If the length is increased by 3 ft. and the width be decreased by 3 ft., the area is decreased by 21 sq. ft. Find the dimensions of the courtyard. [C. U. 1927]

মনে কর, দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে x ও y ফুট। প্রথম সর্ত হইতে $2(x+y)=60$, বা, $x+y=30\cdots(1)$, দ্বিতীয় সর্ত হইতে $(x+3)(y-3)$
$=xy-21$, বা, $xy-3x+3y-9=xy-21$, বা, $x-y=4\cdots(2)$

এখন (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $x=17$, $y=13$.

∴ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=17$ ফুট এবং প্রস্থ $=13$ ফুট।

18. Digits সম্বন্ধীয় সমাধান

উদা. 8. A certain number consisting of two digits is equal to eight times the sum of its digits; if 45 be subtracted from the number, the digits interchange their places. Find the number. [C. U. 1919]

মনে কর, একক স্থানের অঙ্ক x এবং দশক স্থানের অঙ্ক y, সুতরাং সংখ্যাটি হইল $10y+x$.

প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $10y+x=8(x+y)\cdots(1)$ এবং

$10y+x-45=10x+y\cdots(2)$. এখন (1) হইতে $2y-7x=0\cdots(3)$

এবং (2) হইতে $9y-9x=45$, বা, $y-x=5\cdots(4)$

(3) ও (4) সমাধান করিয়া পাই $x=2$ এবং $y=7$.

∴ নির্ণেয় সংখ্যাটি $=10\times 7+2=72$.

[দ্রষ্টব্য : Digit বলিতে কেবল x ও y-কে বুঝাইবে, কিন্তু সংখ্যাটি হইবে $10y+x$. যদি শতকের স্থানে z থাকিত, তবে সংখ্যাটি হইত $100z+10y+x$. বালকেরা প্রায়ই number ও digit গোলমাল করিয়া ফেলে।]

উদা. 9. The sum of the digits of a number less than 100 is 6 ; if the digits be reversed the resulting number will be less by 18 than the original number. Find the number.

[C. U. '25]

সংখ্যাটি 100 অপেক্ষা কম বলিয়া উহা দুই অঙ্কের।

মনে কর, এককের অঙ্ক x ও দশকের অঙ্ক y, সুতরাং সংখ্যাটি $10y+x$.

প্রদত্ত সর্তদ্বয় হইতে পাই $x+y=6\cdots(1)$

এবং $10x+y=10y+x-18\cdots(2)$.

(2) হইতে পাই $9x-9y=-18$, বা, $x-y=-2\cdots(3)$

এখন (1) ও (3) সমাধান করিলে পাই $x=2$, এবং $y=4$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $=10\times4+2=42$.

উদা. 10. A number consists of two digits ; the sum of the digits is 11, and if the left digit be increased by 2, it (the digit) will be equal to $\frac{1}{8}$th of the number. Find the number.

[C. U. '36]

মনে কর, সংখ্যাটি $10y+x$. প্রদত্ত সর্তদ্বয় হইতে $x+y=11\cdots(1)$ এবং $y+2=\frac{1}{8}(10y+x)\cdots(2)$. (2) হইতে $8y+16=10y+x$, বা, $2y+x=16\cdots(3)$. (1) ও (3) সমাধান করিলে $x=6$, $y=5$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=5\times10+6=56$.

উদা. 11. The sum of a number consisting of two digits and the number formed by interchanging the digits is 110 and the difference between the digits is 6. Find the number.

[A. U. '28]

মনে কর, সংখ্যাটি $=10y+x$. অতএব, প্রদত্ত সর্তদ্বয় হইতে

$(10y+x)+(10x+y)=110\cdots(1)$ এবং $x-y=6$ বা $x-y=6\cdots(2)$

(1) হইতে পাই $11x+11y=110$, বা, $x+y=10 \cdots (3)$.

এখন (2) ও (3) সমাধান করিলে পাই $x=8$ ও $y=2$. অথবা $x=2$, $y=8$

অতএব, নির্ণেয় সংখ্যাটি 28 অথবা 82.

[এককের অঙ্ক বড় ধরিলে 28; দশকের অঙ্ক বড় ধরিলে 82]

উদা. 12. One of the digits of a number is greater by 5 than the other. When the digits are inverted the number becomes $\frac{3}{8}$ths of the original number. Find the number.

[D. B. '28]

মনে কর, এককের অঙ্ক x ও দশকের অঙ্ক y, সুতরাং সংখ্যাটি $=10y+x$.

[N.B. এখানে অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া গেলে নূতন সংখ্যাটি পূর্ব সংখ্যা অপেক্ষা ছোট হয় বলিয়া এককের অঙ্ক দশকের অঙ্ক অপেক্ষা কম আছে বুঝা যায়। আর অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া দিলে নূতন সংখ্যাটি যদি আগের সংখ্যা অপেক্ষা বেশী হয়, তবে এককের অঙ্ক বড় আছে বুঝিবে।]

প্রদত্ত সর্ত হইতে $y-x=5 \cdots (1)$ এবং $10x+y=\frac{3}{8}(10y+x) \cdots (2)$.

(2) হইতে $80x+8y=30y=3x$, বা, $77x-22y=0$,

বা, $7x-2y=0 \cdots (3)$, এক্ষণে, (1) ও (3) সমাধান করিলে $x=2$, $y=7$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=7\times10+2=72$.

উদা. 13. There is a number of two digits whose difference is 2, and if it be diminished be $\frac{3}{2}$ times the sum of the digits, the digits will be inverted ; find it. [C. U. 1899]

মনে কর, এককের অঙ্ক x, ও দশকের অঙ্ক y, সুতরাং সংখ্যাটি $=10y+x$. এখানে অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া দিলে সংখ্যাটি কমিয়া যায় বলিয়া এককের অঙ্ক দশকের অঙ্ক অপেক্ষা ছোট।

$\therefore$ $y-x=2 \cdots (1)$, এবং $(10y+x)-\frac{3}{2}(x+y)=10x+y \cdots (2)$.

(2) হইতে $20y+2x-3x-3y=20x+2y$ [2 দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $15y-21x=0$, বা, $5y-7x=0 \cdots (3)$

(1) ও (3) সমাধান করিলে পাই $x=5$, এবং $y=7$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=7\times10+5=75$.

উদা. 14. A number consists of three digits of which the middle one is 0 and the sum 8 ; the number formed by interchanging the digits is greater than the number itself by 198. Find the number. [C. U. 1922]

মনে কর, এককের অঙ্ক x, দশকের অঙ্ক 0 এবং শতকের অঙ্ক y ; সুতরাং সংখ্যাটি $=100y+x$.

প্রদত্ত সর্তগুলি হইতে পাই $x+y=8$ .....(1)

এবং $100x+y=100y+x+198$ ......(2)

(2) হইতে পাই $99x-99y=198$, বা $x-y=2$...(3)

(1) ও (3) সমাধান করিলে পাই $x=5$, $y=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=3\times100+5=305$.

উদা. 15. A number consists of 3 digits whose sum is 10. The middle digit is equal to the sum of the other two ; and the number will be increased by 99 if the first and third digits be interchanged. Find the number. [C. U. 1923]

[দ্রষ্টব্য : মনে কর, 325 একটি সংখ্যা। ইহার first digit বলিলে 3কে বুঝাইবে (5কে নহে), কারণ 325 সংখ্যাটি লিখিবার সময় আমরা প্রথমে 3, তারপর 2, তারপর 5 লিখি।]

মনে কর, একক, দশক ও শতকের অঙ্ক যথাক্রমে x, y, z, সুতরাং সংখ্যাটি $=100z+10y+x$.

প্রদত্ত সর্তগুলি হইতে পাই $x+y+z=10\cdots(1)$, $x+z=y\cdots(2)$

এবং $100x+10y+z=100z+10y+x+99\cdots(3)$.

(1) ও (2) হইতে পাই $x+(x+z)+z=10$, বা, $2(x+z)=10$,

বা, $x+z=5\cdots(4)$. (3) হইতে $99x-99z=99$, বা, $x-z=1\cdots(5)$

এখন (4) ও (5) সমাধান করিলে $x=3$, $z=2$ হয়, সুতরাং $y=5$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $=2\times100+5\times10+3=253$.

উদা. 16. A number consists of 3 digits, each greater by 2 than that which precedes it ; if 16 be subtracted from the number, the remainder will be less than 20 times the sum of the digits by 10. Find the number.

মনে কর, শতকের অঙ্ক x, সুতরাং প্রদত্ত সর্ত হইতে দশকের অঙ্ক $x+2$ এবং এককের অঙ্ক $x+4$ হইবে

অতএব সংখ্যাটি $=100x+10(x+2)+(x+4)=111x+24.$

এখন দ্বিতীয় সর্ত হইতে পাই $111x+24-16$

$$=20(x+x+2+x+4)-10,$$

বা, $111x+8=60x+110$ বা, $51x=102$, $\therefore\ x=2.$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=111\times2+24=246.$

উদা. 17. A number consists of three consecutive digits. If the digits are reversed, the difference of the numbers is 33 times the greatest digit involved. Find the number. [C. U. 1939]

মনে কর, শতকের অঙ্ক x, সুতরাং এখানে দশকের অঙ্ক $x+1$ এবং এককের অঙ্ক $x+2$.

$\therefore$ সংখ্যাটি $=100x+10(x+1)+(x+2)=111x+12.$

প্রদত্ত দ্বিতীয় সর্ত হইতে পাই

$$\{100(x+2)+10(x+1)+x\}-(111x+12)=33(x+2),$$

বা, $111x+210-111x-12=33x+66$, বা, $33x=132$, $\therefore\ x=4.$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=4\times111+12=456.$

19. **স্রোত ও নৌকার গতি :** স্থির জলে অর্থাৎ নদীতে স্রোত না থাকিলে নৌকার গতিবেগ যত, এক ঘণ্টায় নৌকা ততদূর যায়। যদি স্রোত থাকে, তবে (1) স্রোতের অনুকূলে (with the stream or current, down-stream, down the river) যাইবার সময় নৌকার গতি ও স্রোতের গতির সমষ্টি যত, এক ঘণ্টায় নৌকা ততদূর যায়, কিন্তু (2) স্রোতের প্রতিকূলে বা বিপরীত দিকে (against the current, up-stream or up the river) যাইবার সময় নৌকার গতি ও স্রোতের গতির অন্তর যত, নৌকা এক ঘণ্টায় ততদূর যায়।

উদা. 18. A boat goes up-stream 30 miles and down-stream 44 miles in 10 hours ; it also goes up-stream 40 miles and down-stream 55 miles in 13 hours. Find the rate of the stream and of the boat. [D. B. 1933]

এখানে মনে কর, নৌকার গতি ঘণ্টায় x মাইল এবং স্রোতের গতি ঘণ্টায় y মাইল, সুতরাং স্রোতের অনুকূলে নৌকা ঘণ্টায় $x+y$ এবং স্রোতের প্রতিকূলে ঘণ্টায় $x-y$ মাইল যায়।

এক্ষণে, প্রদত্ত সর্তদ্বয় হইতে পাই $\frac{30}{x-y}+\frac{44}{x+y}=10\cdots(1)$

$$\frac{40}{x-y}+\frac{55}{x+y}=13\cdots(2)$$

$(1)\times4$ ও $(2)\times3$ করিয়া পাই $\frac{120}{x-y}+\frac{176}{x+y}=40$

এবং $\frac{120}{x-y}+\frac{165}{x+y}=39$

(বিয়োগ) $\therefore\ \frac{11}{x+y}=1.\quad \therefore\ x+y=11\cdots(3)$

এখন $x+y$এর মান বসাইয়া (1) হইতে পাই $x-y=5\cdots(4)$.

(3) ও (4) সমাধান করিলে পাই $x=8,\ y=3$.

অতএব, নৌকার গতি ঘণ্টায় 8 মাইল এবং স্রোতের গতি ঘণ্টায় 3 মাইল।

উদা. 19. A man rowing at the rate of 5 miles an hour in still water takes thrice as much time in going 40 miles up a river as in going 40 miles down; find the rate at which the river flows. [C. U. 1935]

মনে কর, নদীর বা স্রোতের গতি ঘণ্টায় x মাইল, সুতরাং নৌকাটি স্রোতের প্রতিকূলে (up the river) ঘণ্টায় $5-x$ মাইল এবং স্রোতের অনুকূলে (down) ঘণ্টায় $5+x$ মাইল যায়। $\therefore$ 40 মাইল স্রোতের প্রতিকূলে ও অনুকূলে যাইতে যথাক্রমে $\frac{40}{5-x}$ ও $\frac{40}{5+x}$ ঘণ্টা লাগে।

এখন প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $\frac{40}{5-x}=3\times\frac{40}{5+x}$ বা, $\frac{1}{5-x}=\frac{3}{5+x}$,

বা, $5+x=15-3x$, বা, $4x=10$, $\therefore\ x=2\frac{1}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় নদীর গতি ঘণ্টায় $2\frac{1}{2}$ মাইল।

উদা. 20. A person rowed down a river, a distance of 70 miles in 10 hours with the stream and rowed back again in 70 hours. Find the rate of the flow of the river per hour. [C. U. '41]

মনে কর, নদীর গতি ঘণ্টায় x মাইল এবং নৌকার গতি ঘণ্টায় y মাইল। প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $10(x+y)=70\cdots(1)$ এবং $70(y-x)=70\cdots(2)$.

(1) হইতে $x+y=7\cdots(3)$, এবং (2) হইতে $y-x=1\cdots(4)$.

এখন (3) ও (4) সমাধান করিলে $x=3$, $\therefore$ নদীর গতি ঘণ্টায় 3 মাইল।

20. ঘড়ি সম্বন্ধীয় সমাধান: (1) ঘড়ির dial-টি ছোট ছোট 60 ভাগে বিভক্ত করা আছে। এক একটি ভাগকে মিনিট-ঘর বা minute space বা minute division বলে। মিনিটের কাঁটা যতক্ষণে 60 মিনিট ঘর যায় ঘণ্টার কাঁটা ততক্ষণে 5 মিনিট ঘর যায়।

উদা. 21. A man who went out between 4 and 5 P. M. and returned between 5 and 6 P. M. found that the hands of his watch had exactly changed places. When did he go out? [C. U. '30 Addl. '51]

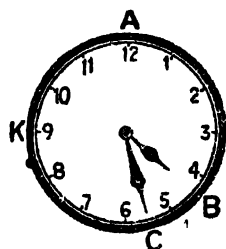
মনে কর, লোকটি 4টা x মিনিটের সময় বাহিরে গিয়াছিল, এবং ঐ সময় ঘণ্টার কাঁটা 4টা ও 5টার মধ্যে B বিন্দুতে এবং মিনিটের কাঁটা 5টা ও 6টার মধ্যে C বিন্দুতে ছিল। এখন 4টা x মিনিটের সময় মিনিটের কাটা 12টার ঘর হইতে x মিনিট-ঘর এবং ঘণ্টার কাঁটা 4টার ঘর হইতে $\frac{1}{12}x$ মিনিট-ঘর আগাইয়া ছিল। এখন চিত্রে দেখ—

চাপ $AC = x$ মিনিট-ঘর,

চাপ $AB = 20+\frac{x}{12}$ মিনিট-ঘর

চাপ $CKA = 60-x$ মিনিট-ঘর

চাপ $BC = x-(20+\frac{x}{12})$ মিনিট-ঘর।

লোকটি যতক্ষণ বাহিরে ছিল ততক্ষণে মিনিটের কাঁটা CKAB চাপ অর্থাৎ $(60-x+20+\frac{x}{12})$ মিনিট-ঘর গিয়াছে এবং ঘণ্টার কাঁটা BC চাপ অর্থাৎ $x-(20+\frac{x}{12})$ মিনিট-ঘর গিয়াছে। একই সময়ে মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার 12 গুণ যায়;

∴ $60 - x + 20 + \frac{x}{12} = 12\{x - (20 + \frac{x}{12})\}$

বা, $80 - \frac{11x}{12} = 11x - 240$, বা $\frac{143x}{12} = 320$,

∴ $x = \frac{3840}{143} = 26\frac{122}{143}$.

অতএব, সে ব্যক্তি 4টা $26\frac{122}{143}$ [illegible] সময় বাহির হইয়াছিল।

উদা. 22. A man who went out between 3 P. M. and 4 P. M. and returned between 4 P. M. and 5 P. M. found that the hands of the clock had exactly changed places. When did he go out ? When did he return and how long did he stay outside ? [cf. C. U. 1942]

[**দ্বিতীয় প্রণালী**] মনে কর, লোকটি 3টা বাজিয়া x মিনিটে বাহির হইল এবং 4টা বাজিয়া y মিনিটে ফিরিয়া আসিল। মিনিটের কাঁটা যতক্ষণে x ও y মিনিট-ঘর যায়, ঘণ্টার কাঁটা ততক্ষণে $\frac{x}{12}$ এবং $\frac{y}{12}$ মিনিট-ঘর যায়। অতএব, সে বাহির হইবার সময় ঘণ্টার কাঁটা 12টার ঘর হইতে $15 + \frac{x}{12}$ মিনিট-ঘর দূরে ছিল এবং 4টা y মিনিটে ফিরিয়া দেখিল মিনিটের কাঁটা সেই ঘরে আছে। ∴ $y = 15 + \frac{x}{12} \cdots (1)$. আবার, ফিরিবার সময় ঘণ্টার কাঁটা 12টার ঘর হইতে $20 + \frac{y}{12}$ মি. ঘর দূরে আছে, পূর্বে ঐ স্থানে মিনিটের কাঁটা ছিল। ∴ $x = 20 + \frac{y}{12} \cdots (2)$.

এখন (1) ও (2) সমাধান করিলে পাই $x = 21\frac{57}{143}$ এবং $y = 16\frac{112}{143}$.

∴ লোকটি 3টা $21\frac{57}{143}$ মিনিটে বাহির হইয়া 4টা $16\frac{112}{143}$ মিনিটে ফিরিয়াছে এবং ঐ দুই সময়ের অন্তর অর্থাৎ $55\frac{5}{13}$ মিনিট বাহিরে ছিল।

[বিবিধ]

উদা. 23. A person bought an article and sold it at a profit of 6%. Had he bought it at 4 p.c. less and sold it at Rs. 2. 6 as. more, his profit would have been 12%. For how much did he buy it ? [C. U. 1944]

মনে কর, দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য x টাকা। উহা 6% লাভে বিক্রয় করিলে বিক্রয়মূল্য হইবে $\frac{106}{100}x$ টাকা। আর উহা 4% কম মূল্যে কেনা থাকিলে ক্রয়মূল্য হইত $\frac{96}{100}x$ টাকা এবং $\frac{96}{100}x$ টাকার দ্রব্য বিক্রয় করিয়া 12% লাভ

করিলে বিক্রয়মূল্য হইত $\frac{1[illegible]}{100}\times\frac{96}{100}x$ টাকা, এই বিক্রয়মূল্য কিন্তু প্রথম বিক্রয়মূল্য অপেক্ষা 2 টা. 6 আ. বা [illegible] টাকা বেশী বলা আছে।

$\therefore\ \frac{112\times 96}{100\times 100}x=\frac{106}{100}x+\frac{1[illegible]}{}$ [illegible] $\frac{672x}{625}-\frac{53x}{50}=\frac{19}{8}$, বা $\frac{10x}{1250}=\frac{19}{8}$,

$\therefore\ x=\frac{19}{8}\times\frac{1250}{10}=$ [illegible: 156¼]. $\therefore$ [illegible]র্ণেয় ক্রয়মূল্য $=156$ টা. 4 আনা।

উদা. 24. Divide the number 77 into three parts such that the sum of the first and second multiplied by 3, the sum of the second and third diminished by 3, and the sum of the first and third increased by 3 may be all equal.

[A U. '33]

মনে কর, অংশ তিনটি যথাক্রমে x, y, z.

অতএব, প্রদত্ত সর্তগুলি হইতে পাই $x+y+z=77\cdots(1)$

এবং $3(x+y)=y+z-3=x+z+3\cdots(2)$

এখন, $3x+3y=y+z-3$, বা $3x+2y-z=-3\ \ldots..(3)$

আবার, $3x+3y=x+z+3$, বা $2x+3y-z=3\cdots\cdots(4)$

$\therefore$ (3)+(4) করিলে $5x+5y-2z=0\cdots\cdots(5)$

এবং (1)× 5 করিলে $5x+5y+5z=385$

(বিয়োগ করিয়া) $-7z=-385$, $\therefore\ z=55$.

এখন, (1) হইতে $x+y=77-55=22\cdots\cdots(6)$,

এবং (2) এর শেষ অংশ হইতে $y-x=6\cdots\cdots(7)$

$\therefore$ (6) ও (7) সমাধান করিলে পাই $x=8$, $y=14$.

অতএব, নির্ণেয় অংশগুলি $=8, 14, 55$.

উদা. 25. Two mixtures contain wine and water in the ratio 2 : 3 and 5 : 4 respectively ; in what ratio must the two mixtures be mixed together so that the resulting mixture may contain equal quantities of wine and water ?

মনে কর, প্রথমটি হইতে x পরিমাণ ও দ্বিতীয়টি হইতে y পরিমাণ দ্রব্য লওয়া হইল। প্রথমটির x পরিমাণের মধ্যে মদ আছে $\frac{2}{5}x$ এবং জল আছে $\frac{3}{5}x$. দ্বিতীয়টির y পরিমাণের মধ্যে মদ $\frac{5}{9}y$ ও জল $\frac{4}{9}y$.

$\therefore$ $(x+y)$ পরিমাণ মিশ্রণের [illegible] মদের পরিমাণ $\frac{2}{5}x+\frac{5}{9}y$

এবং জলের পরিমাণ [illegible] $+\frac{4}{9}y$;

$\therefore$ $\frac{2}{5}x+\frac{5}{9}y=\frac{3}{5}x$ [illegible] বা $\frac{5}{9}y-\frac{4}{9}y=\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}x,$

বা, $\frac{y}{9}=\frac{x}{5}$, $\therefore$ $\frac{x}{y}=\frac{5}{9}$. $\therefore$ নি[illegible] অনুপাত $=5:9.$

[দ্রষ্টব্য : এখানে যদি শেষ মি[illegible] জল সমান সমান না বলিয়া $3:4$ বা অন্য অনুপাত বলা থাকিত, তবে $\dfrac{\frac{2}{5}x+\frac{5}{9}y}{\frac{3}{5}x+\frac{4}{9}y}=\frac{3}{4}$ এইরূপ লিখিয়া $x:y$ কত হয় নির্ণয় করিতে হইত।]

উদা. 26. A traveller walks a certain distance ; had he gone half a mile an hour faster he would have walked it in $\frac{4}{5}$ths of the time ; had he gone half a mile an hour slower, he would have been $2\frac{1}{2}$ hours longer on the road. Find the distance.

মনে কর, মোট দূরত্ব x মাইল এবং লোকটি ঘণ্টায় y মাইল বেগে চলিয়াছিল।

$\therefore$ সে x মাইল গিয়াছিল $\frac{x}{y}$ ঘণ্টায়। অতএব প্রদত্ত সতগুলি হইতে পাই

$$\frac{x}{y+\frac{1}{2}}=\frac{4}{5}\times\frac{x}{y}\cdots\cdots(1) \quad \text{এবং} \quad \frac{x}{y-\frac{1}{2}}=\frac{x}{y}+2\tfrac{1}{2}\cdots\cdots(2)$$

এক্ষণে (1) হইতে $\frac{1}{y+\frac{1}{2}}=\frac{4}{5y}$, বা, $5y=4y+2$, $\therefore$ $y=2.$

$\therefore$ (2) হইতে $\frac{x}{2-\frac{1}{2}}=\frac{x}{2}+2\frac{1}{2}$, বা, $\frac{2x}{3}=\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$,

বা, $4x=3x+15$, $\therefore$ $x=15.$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $=15$ মাইল।

উদা. 27. If a sum of money be lent at 5%, the interest for a certain time exceeds the lone by Rs. 80 ; but if it be lent at 3% for a fourth of the time, the loan exceeds its interest by Rs. 328. Find the sum lent.

মনে কর, x টাকা y বৎসরের জন্য ধার দেওয়া হইয়াছিল।

5% হারে x টা[illegible] এক বৎসরের সুদ $= \frac{5x}{100} = \frac{x}{20}$

$\therefore$ " " " [illegible] " " $= \frac{xy}{20}$.

অতএব, $\frac{xy}{20} = x + 80 \cdots\cdots$([illegible]

আবার, 3% হারে x টাকা[illegible]র সুদ $= \frac{3x}{100} \times \frac{y}{4} = \frac{3xy}{400}$

অতএব, $x = \frac{3xy}{4}$[illegible]28$\cdots\cdots(2)$

এক্ষণে (1) হইতে x[illegible]$20(x+80) \cdots\cdots (3)$

এবং (2) হইতে $\frac{3xy}{400} = x - 328$, বা, xy[illegible]$\frac{400(x-328)}{3}$ $\cdot(4)$

$\therefore \quad \frac{400(x-328)}{3} = 20(x+80)$, বা, $\frac{20(x-328)}{3} = x + 80$,

বা, $20x - 6560 = 3x + 240$, বা, $17x = 6800$, $\therefore \; x = 400$.

অতএব, 400 টাকা ধার দেওয়া হইয়াছিল।

উদা. 28. If the larger of two numbers is divided by the smaller the quotient and remainder are each 3. The result will be the same, if 10 times the smaller is divided by the larger. Find the numbers.

মনে কর, x ও y দুইটি সংখ্যা এবং $x > y$.

$\because \quad x$কে y দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল ও ভাগশেষ উভয়ই 3 হয়,

$\therefore \quad x = 3y + 3 \cdots\cdots (1)$

অনুরূপে দ্বিতীয় সর্ত হইতে পাই $10y = 3x + 3 \cdots\cdots (2)$

(2)-এ xএর স্থানে $3y+3$ বসাইয়া পাই, $10y = 3(3y+3) + 3$,

বা, $\quad 10y = 9y + 12, \qquad \therefore \quad y = 12$.

$\therefore \quad$ (1) হইতে $x = 3 \times 12 + 3 = 39$.

$\therefore \quad$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 39$ এবং 12.

উদা. 29. At a certain election there were two rival candidates, and their supporters were conveyed to the polling booths in carriages capable of accommodating 10 and 15 voters respectively. If the voters, 1050 in all, just filled 85 carriages, find by what majority the election was won.

মনে কর, প্রথম ও দ্বিতীয় ব্যক্তির ভোটার সংখ্যা যথাক্রমে x ও y.

অতএব, প্রদত্ত সর্তদ্বয় হইতে পাই, $x+y=1050 \cdots (1)$

আবার, ∵ প্রথম ব্যক্তির ভোটারদের জন্য $\frac{x}{10}$ সংখ্যক গাভী ও দ্বিতীয় ব্যক্তির ভোটারদের জন্য $\frac{y}{15}$ সংখ্যক গাভী লাগে, ∴ $\frac{x}{10}+\frac{y}{15}=85 \cdots (2)$

এক্ষণে সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া পাই $x=450$, $y=600$.

অতএব, দ্বিতীয় ব্যক্তি $(600-450)=150$ ভোট বেশী পাইয়া জয়লাভ করিয়াছে।

উদা. 30. A train 88 yds. long passed another train 110 yds. long travelling in the same direction on a parallel line of rails in 27 seconds, but had the slower train been running half as fast again, it would have been passed in twice that time. Find the rates at which the trains were travelling.

মনে কর, প্রথম দ্রুতগামী ট্রেনটি ঘণ্টায় x মাইল বেগে এবং অন্য ট্রেনটি ঘণ্টায় y মাইল বেগে যাইতেছিল।

প্রথম পক্ষে সময় $=27$ সে. $=\frac{3}{400}$ ঘ., দ্বিতীয় পক্ষে সময় লাগে $\frac{3}{200}$ ঘ.

∵ ট্রেন দুইটি একই দিকে যাইতেছে,

∴ উভয়ের আপেক্ষিক বেগ ঘণ্টায় $(x-y)$ মাইল।

উভয় ট্রেনের মোট দৈর্ঘ্য $=(110+88)$গ. $=198$গ.

$$=\frac{198}{1760} \text{ মা.} = \frac{9}{80} \text{ মাইল}$$

ঘণ্টায় $(x-y)$ মাইল বেগে $\frac{9}{80}$ মাইল যাইতে সময় লাগে $\frac{9}{80(x-y)}$ ঘ

সুতরাং $\frac{9}{80(x-y)}=\frac{3}{400}$, বা, $x-y=15 \cdots\cdots (1)$

দ্বিতীয় পক্ষে, দ্বিতীয় ট্রেনের গতি ঘণ্টায় $\frac{3}{2}y$ মাইল।

∴ উভয় ট্রেনের আপেক্ষিক বেগ $=$ ঘণ্টায় $(x-\frac{3}{2}y)$ মাইল।

∴ $\frac{9}{80(x-\frac{3}{2}y)}=\frac{3}{200}$, বা, $2x-3y=15 \cdots (2)$

এক্ষণে, (1)×2 করিয়া পাই
$2x-2y=30$
এবং (2) হইতে $2x-3y=15$
∴ (বিয়োগ করিয়া) $y=15$, (1) হইতে $x=30$.
অতএব, ট্রেন দুইটির গতিবেগ যথাক্রমে ঘণ্টায় 30 মাইল ও 15 মাইল।

উদা. 31. A certain number of men paid a bill. If there had been 10 more, each would have paid 1*s*. less; but if there had been 5 fewer, each would have paid 1*s*. more. Find the number of men and what each had to pay.

মনে কর, মোট লোকসংখ্যা x এবং প্রত্যেকে y শিলিং করিয়া দিয়াছে, সুতরাং বিলটি ছিল মোট xy শিলিং-এর। এক্ষণে প্রদত্ত সর্তদ্বয় হইতে পাই

$$\frac{xy}{x+10}=y-1 \quad (1) \qquad \text{এবং} \quad \frac{xy}{x-5}=y+1 \cdots (2)$$

(1) হইতে পাই $xy=xy-x+10y-10$, বা $x-10y=-10 \cdots (3)$
(2) „ „ $xy=xy+x-5y-5$, বা $x-5y=5 \cdots (4)$
∴ (বিয়োগ) $-5y=-15$, ∴ $y=3$.
আবার, (4) হইতে $x-5\times 3=5$, ∴ $x=20$.
অতএব, নির্ণেয় লোকসংখ্যা $=20$, এবং প্রত্যেকে 3 শিলিং দিয়াছিল।

উদা. 32. In a race of 1 mile, A gives B a start of 88 yds. and beats him by a minute and a half; but A is beaten by 44 yds, if he gives B a start of 2 mins. 12 seconds. In what time can A and B run a mile ?

মনে কর, 1 মাইল যাইতে Aএর x মিনিট এবং Bএর y মিনিট লাগে।

অতএব, 1 মিনিটে A যায় $\frac{1760}{x}$ গজ এবং B যায় $\frac{1760}{y}$ গজ।

প্রথম দৌড়ে, A অপেক্ষা B 88 গজ আগে ছিল, অথচ $1\frac{1}{2}$ মিনিটে B পরাজিত হইয়াছে। ∵ A 1 মাইল যায় x মিনিটে, ∴ $(1760-88)$ বা, 1672 গজ যাইতে Bএর $(x+1\frac{1}{2})$ মিনিট সময় লাগে।

$$\therefore \quad 1672 \div \frac{1760}{y} = x + 1\tfrac{1}{2}, \text{ বা } \frac{1672y}{1760} = \frac{2x+3}{2},$$

$$\text{বা,} \quad 20x - 19y = -30 \cdots (1).$$

দ্বিতীয় দৌড়ে, B যখন গন্তব্য[illegible]ছিল, A তখন তাহার 44 গজ পিছনে ছিল অর্থাৎ A তখন (1760 − 44) বা 1716 গজ গিয়াছে। ∵ B $2\frac{1}{5}$ মিনিট আগে রওনা হইয়াছিল, ∴ [illegible] সে $(y - 2\frac{1}{5})$ মিনিটে গিয়াছে। অতএব, A ঐ $(y - 2\frac{1}{5})$ মিনিটে 1716 গজ গিয়াছে।

$$\therefore \quad 1716 \div \frac{1760}{x} = y - 2\tfrac{1}{5}, \text{ বা } \frac{1716x}{1760} = \frac{5y-11}{5},$$

$$\text{বা,} \quad 39x - 40y = -88 \cdots\cdots (2)$$

এক্ষণে, (1) × 40 এবং (2) × 19 করিয়া পাই

$$800x - 760y = -1200$$

$$\text{এবং } 741x - 760y = -1672$$

$$\therefore \text{ (বিয়োগ) } 59x = 472, \quad \therefore \quad x = 8.$$

$$\therefore \quad (1) \text{ হইতে } y = 10.$$

অতএব, এক মাইল যাইতে A ও B-এর যথাক্রমে 8 ও 10 মিনিট সময় লাগিয়াছিল।

Exercise 5

1. Ten years ago, a father was seven times as old as his son ; two years hence twice his age will be equal to 5 times his son's ; what are their present ages ? [C. U. 1920]

2. A motorist does a journey of 80 miles in 6 hours. During the first part of the journey he travels at the rate of 10 miles and during the latter part at 18 miles an hour. How far does he travel at each rate ? [C. U. '18, '29]

3. A number consists of two digits. The sum of the digits falls short of the number by 54 ; if the digits be reversed the number exceeds the old number by 27 ; find the number. [P. U. '35]

4. The product of two numbers is 18225 and the quotient when the larger number is divided by the smaller is 81. Find the numbers. [C. U. 1945]

5. Find a fraction which becomes $\frac{1}{2}$ on subtracting 1 from the numerator and adding 1 to the denominator and reduces to $\frac{1}{3}$ on subtracting 7 from the numerator and 2 from the denominator. [C. U. 1928]

6. A number consists of two digits. The digit in the tens' place is 3 times the digit in the units' place. If 54 is subtracted from the number the digits are inverted. Find the number. [C. U. 1943]

7. A certain number between 10 and 100 is 8 times the sum of its digits, and if 45 be subtracted from it, the digits will be reversed. Find the number. [C. U. 1919]

8. Reverse the digits of a number and it will become $\frac{5}{8}$ths of what it was before ; and also the difference between the two digits is 1. Find the number. [C.U. 1883, '49 Sup.]

9. A man, who went out for an evening walk between 5 and 6, returned between 6 and 7 and found that the hands of the clock had exactly changed places. When did he go out ? [C. U. 1944]

10. A boy spends his money in oranges. If he had received 4 more for his money, they would have averaged a half-penny each less , if three less, a half-penny each more. How much did he spend ? [P. U. 1921, Addl.]

11. A man rowing at the rate of 4 miles an hour takes thrice as much time in going 30 miles up a river as in going 30 miles down ; find the rate at which the river flows.

12. A mixture contains wine and water in the ratio of 5 : 3 and another in the ratio of 4 : 5. In what ratio must the two kinds of mixture be mixed to give a mixture of wine and water in the ratio of 31 : 29 ?

13. How much gold, at Rs. 20 a tola, must be mixed with 14 tolas of Rs. 15 a tola, so that the mixture may be worth Rs. 18 a tola ? [P. U. 1921]

14. If a cyclist had gone 2 miles an hour faster, he would have taken 1 hour 40 minutes less to ride 100 miles. What time did he take ? [P. U. 1925]

15. A number consis[illegible] digits, the digit in the units' place being four times that in the [illegible] place. If the digits be inverted, the new num[illegible]ncreased by 2 equals three times the old [illegible] the number. [C.U. 1901]

16. Two m[illegible] 40 miles apart, walking in opposite directions, meet in $6\frac{2}{3}$ hours ; but if one of them had doubled his pace, they would have met in $\frac{3}{4}$ths of the time. Find their respective speeds. [P. U. 1931]

17. A man rows 30 miles down a river in 6 hours and returns in 10 hours. Find the rate at which the man rows and also the rate at which the river flows. [P. U. 1933]

18. A number consists of two digits ; the digit in the tens' place is twice the digit in the units' place ; if 36 be subtracted from the number, the digits are inverted ; find the number. [C. U. 1946]

19. The number of months in the age of a man on his birth-day in the year 1875 was exactly half of the number denoting the year in which he was born. In what year was he born ? [A. U.]

20. A boy buys a certain number of oranges at 3 for 2*d.*, and one-third of that at 2 for 1*d.* ; at what price must he sell them to get 20% profit ? If his profit be 5*s.* 4*d.*, find the number bought. [D. B. 1936]

21. One customer buys 14 lb. of tea and 10 lb. of coffee for £2. 3*s.* and another buys 11 lb. of tea and 15 lb. of coffee for £2. 4*s.* 6*d.* Find the price of tea and coffee per lb. [D. B. '40]

22. A number consists of three digits each less by unity than that which follows it and if 3 be subtracted from the number, the remainder will be 20 times the sum of the digits. Find the number. [G. U. '48]

23. *P* and *Q* start at the same time from Howrah and Madhupur and proceed towards each other at the rate of 20 and 30 miles per hour respectively. They meet when *Q* has proceeded 36 miles farther than *P*. Find the distance between Howrah and Madhupur. [C. U. '49]

24. If the numerator of a certain fraction is doubled and its denominator increased by 1 its value becomes $\frac{1}{2}$; but if its denominator is doubled and its numerator increased by 1, its value becomes $\frac{1}{6}$. Find the fraction. [E. B. S. B. '55]

25. A man spent 15*s*. 2*d*. in buying oranges at the rate of 3 for 2 pence and apples at five pence a dozen; if he had bought 5 times as many oranges and $\frac{1}{4}$ of the number of apples he would have spent £2. 4*s*. 2*d*. How many of each did he buy ?

26. Find the distance between two towns when by increasing the speed 7 miles per hour a train can perform the journey in 1 hour less, and by reducing the speed 5 miles an hour can perform the journey in 1 hour more.

27. The middle digit of a number between 100 and 1000 is zero and the sum of the other digits is 16. If the digits be reversed, the number so formed exceeds the original number by 198; find it.

28. The three sides of a triangle are $x+5$, $4x-y$ and $y+2$ inches in length. If the triangle is equilateral, find its perimeter.

29. If the sum of the digits of a number is divisible by 3, show that the number is divisible by 3.

30. If $\frac{1}{3}$ be added to the numerator of a certain fraction, the fraction is increased by $\frac{1}{15}$, and if $\frac{1}{4}$ be taken from the denominator the fraction becomes $\frac{8}{15}$. Find the fraction.

31. The incomes of two men are in the ratio 5 : 3 and their expenditures are as 9 : 5. Each saves Rs. 30 a year. Find their incomes.

32. A man walks a certain distance. Had he gone half a mile faster, he would have walked it in $\frac{6}{7}$ths of the time, and had he gone $\frac{3}{5}$ mile an hour slower, he would have taken 2 hours longer. Find the distance and the rate at which he walked.

33. If a sum of money be lent out at 5%, the interest for a certain time exceeds the loan by Rs. 60; but if it be lent at 6% for half the period, the loan exceeds the interest by Rs. 290. Find the sum.

34. If the larger of two numbers is divided by the smaller the quotient and the remainder are each 4. The result will be the same, if 20 times the smaller is divided by the larger. Find the numbers.

35. *A* can run 50 yds. whilst *B* runs 45 yds.; if *B* has 5 minutes' start in a race, what time will *A* take to get level with *B*?

36. A train 44 yards long passed another train 66 yards long travelling in the same direction in $22\frac{1}{2}$ seconds. Had the slower train been running half as fast again, it would have been passed in 45 seconds. Find the rates at which the trains were travelling.

37. In a race of 1320 yards *A* gives *B* a start of 176 yards, and beats him by 15 seconds, but *A* is beaten by 110 yards, if he gives *B* a start of one minute. In what time can *A* and *B* run a mile?

Theory of Indices (সূচক প্রকরণ)

21. সূচক। a^3, a^m প্রভৃতিতে aএর ঘাত যাহা দ্বারা সূচিত হইয়াছে (এখানে 3, m প্রভৃতি) তাহাকে ঘাতের সূচক বলে।

a^3এর অর্থ $a \times a \times a$ (তিনটি aএর গুণফল), a^mএর অর্থ $a \times a \times a \times \cdots\cdots m$ সংখ্যক aএর গুণফল।

22. সূচক সম্বন্ধীয় নিম্নের নিয়মগুলি ভালরূপে শিখিতে হইবে

নিয়ম 1. To prove that $a^m \times a^n = a^{m+n}$ where m and n are positive integers. [C. U. '30 ; D. B. '30 ; Pat U. '21]

[Positive = ধনাত্মক অর্থ '+' চিহ্নযুক্ত এবং integerএর অর্থ পূর্ণসংখ্যা]

$a^m = a \times a \times a \times \cdots\cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$a^n = a \times a \times a \times \cdots\cdots n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$\therefore \quad a^m \times a^n = (a \times a \times a \times \cdots\cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$\times (a \times a \times \cdots\cdots n$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$= a \times a \times a \times \cdots\cdots (m+n)$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= a^{m+n}.$

[দ্রষ্টব্য : এই নিয়মটিকে **Fundamental Index Law** বলে। এই নিয়মানুসারে p অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$ হই। উৎপাদকের সংখ্যা আরও থাকিলে এই নিয়মে কার্য হইবে।]

নিয়ম 2. To prove that $a^m \div a^n = a^{m-n}$, where m and n are positive integers and m is greater than n.

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times a \times \cdots m \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}{a \times a \times a \times \cdots n \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}$$

$= a \times a \times a \times \cdots (m-n)$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= a^{m-n}.$

[দ্রষ্টব্য : এখানে নীচের সব a-গুলি উপরের n-সংখ্যক a-র সহিত কাটিয়া গিয়া উপরে এখনও $(m-n)$ সংখ্যক a বাকী থাকিল। মনে রাখিবে ভাগে সূচকগুলি বিয়োগ করিতে হয়। এখানে যদি n বড় হইত, তবে $\frac{1}{a^{n-m}}$ উত্তর হইত।]

[দ্রষ্টব্য : উপরের নিয়ম দুইটিতে সূচকগুলিকে (m, n প্রভৃতি) অখণ্ড ধনসংখ্যা ধরা হইয়াছে। ঐগুলি কিন্তু ঋণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ হইলে

কোন রাশির ঐ সূচকবিশিষ্ট ঘাতের কোন অর্থ হয় কিনা দেখিতে হইবে। যথা—

(a) m যদি ঋণসংখ্যা (মনে কর ...) হয়, তবে

$a^m = a^{-4} = a \times a \times a \times \cdots (-4)$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত হইবে, কিন্তু ইহার কোন অর্থ হয় না। কারণ, a-কে -4 সংখ্যক বার লইয়া ক্রমিক গুণফল নির্ণয় করা যায় না।

(b) মনে কর $m = \frac{4}{5}$; এক্ষণে $a^m = a^{\frac{4}{5}} = a \times a \times \cdots \frac{4}{5}$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত।

ইহারও কোন অর্থ হয় না। কারণ, কোন রাশিকে $\frac{4}{5}$ বার লওয়া ও তাহাদের গুণফল নির্ণয় করার অর্থ হয় না।

(c) অনুরূপে $m = -\frac{4}{5}$ বা $m = 0$ হইলেও a^m অর্থহীন হইবে। **এইরূপ সূচকবিশিষ্ট রাশির অর্থ নিম্নে দেখ।**

অনুসিদ্ধান্ত : (i) What is the value of a^0 ?

আমরা জানি, $a^m \times a^n = a^{m+n}$, এখানে মনে কর $n = 0$.

অতএব, $a^m \times a^0 = a^{m+0} = a^m$, $\therefore \quad a^0 = \frac{a^m}{a^m} = 1$,

[অন্যপ্রণালী : $a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$]

[**দ্রষ্টব্য :** 0 সূচকবিশিষ্ট যে কোন সংখ্যার মান 1 হইবে।]

(ii) ঋণাত্মক (অর্থাৎ – চিহ্নযুক্ত) সূচকের অর্থ নির্ণয় :—

Prove that $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

$\because \quad a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad \therefore \quad a^m \times a^{-m} = a^{m-m}$ ($n = -m$ ধরিয়া)

$$= a^0 = 1$$

$$\therefore \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

[দ্রষ্টব্য : অনুরূপে $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$. কোন ঋণাত্মক সূচকযুক্ত সংখ্যা উহারই ধনাত্মক সূচকযুক্ত অন্যোন্যকের সমান; অর্থাৎ $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^{-3}} = a^3$.]

নিয়ম : 3. To prove that $(a^m)^n = a^{mn}$.

[C. U. 1.., D. B. '30 , P. U. '29]

(i) যদি n অখণ্ড ধনসংখ্যা হয়, তবে

$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \cdots\cdots n$ সংখ্যক পদ

$= a^{m+m+m+}$ ....n সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$= a^{mn}$.

অনুসিদ্ধান্ত : (a) $(a^{mn})^p = a^{mnp}$, $(a^n)^{np} = a^{mnp}$,

(b) What is the meaning of $a^{\frac{m}{n}}$?

$\because \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$, $\therefore$ $a^{\frac{m}{n}}$ কে a^mএর n^{th} root (অর্থাৎ n-তম মূল) বলা যায়।

আবার, $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$, $\therefore$ $a^{\frac{m}{n}}$কে $a^{\frac{1}{n}}$ এর m^{th} power (অর্থাৎ m ঘাত) বলা যায়।

[দ্রষ্টব্য : কোন সংখ্যার সূচক ভগ্নাংশ হইলে ঐ সূচকের লবকে সংখ্যাটির ঘাত (power) এবং হরকে সংখ্যাটির মূল (root) ধরিতে হয়। সুতরাং $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{2}{5}} = (\sqrt[5]{a})^2 = \left(a^{\frac{1}{5}}\right)^2$, এবং $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[p]{a^q} = a^{\frac{q}{p}}$ এইভাবে লেখা যায়।]

(ii) নিয়ম 3এ n একটি ভগ্নাংশ হইলে মনে কর $n = \frac{p}{q}$ এবং p ও q প্রত্যেকটি অখণ্ড ধনরাশি।

একণে $(a^m)^n = (a^m)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^m)^p}$ [উপরের অনুসিদ্ধান্ত দেখ।]

$= \sqrt[q]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{q}} = a^{mn}$.

(iii) নিয়ম 3এ n যদি কোন ঋণরাশি হয়, তবে মনে কর $n = -p$ এবং p একটি অখণ্ড ধনরাশি।

একণে, $(a^m)^n = (a^m)^{-p} = \frac{1}{(a^{mp})}$ [নিয়ম 2এর অনুসিদ্ধান্ত (i)]

$= a^{-mp} = a^{m(-p)} = a^{mn}$.

অতএব $(a^m)^n = a^{mn}$ এই নিয়মটি যেকোন সূচকের পক্ষেই সত্য প্রমাণিত হইল।

(iv) যদি a কোন রাশি এবং m, n উভয়ই অখণ্ড ধনসংখ্যা হয়, তবে $a^{-\frac{m}{n}}$ এর অর্থ কি?

$\because a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$. $\therefore a^{-\frac{m}{n}}$ দ্বারা a^m এর n-তম মূলের অন্যোন্যক বুঝায়।

[দ্রষ্টব্য : a কোন ঋণরাশি হইলে $a^{\frac{m}{n}}$ অথবা $a^{-\frac{m}{n}}$ এর দ্বারা কি বুঝায় তাহা পাঠ্যবহির্ভূত বলিয়া এখানে আলোচিত হইল না।]

নিয়ম 4. To prove that $(ab)^m = a^m b^m$. [C. U. '31 ; D.B.22]

$(ab)^m = ab \times ab \times ab \times \cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= (a \times a \times a \times \cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত$) \times$

$(b \times b \times b \times \cdots\cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত$) = a^m \times b^m = a^m b^m$.

নিয়ম 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \cdots\cdots m$ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= \frac{a \times a \times a \times \cdots\cdots m \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}{b \times b \times b \times \ldots\ldots m \text{ সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}} = \frac{a^m}{b^m}$.

[দ্রষ্টব্য : উপরের নিয়মগুলিতে আমরা a^m এর অর্থ নিম্নলিখিত কয়েক ক্ষেত্রে আলোচনা করিয়াছি :—

(1) a শূন্য ভিন্ন যে কোন ধনসংখ্যা বা ঋণসংখ্যা এবং m একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা।

(2) a শূন্য ভিন্ন যে কোন ধনসংখ্যা এবং m একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ।

(3) a শূন্য ভিন্ন যে কোন ধনসংখ্যা বা ঋণসংখ্যা এবং m একটি অখণ্ড ঋণসংখ্যা।

(4) a শূন্য ভিন্ন ধনসংখ্যা এবং m একটি ঋণাত্মক ভগ্নাংশ

নিয়ম 6. যদি m একটি ধনা[illegible]ক ভগ্নাংশ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a^m b^m = (ab)^m$.

মনে কর $m = \frac{p}{q}$ (p ও q প্রত্যে[illegible] ধনরাশি)

এক্ষণে, $(a^m b^m) = \left(a^{\frac{p}{q}} . b^{\frac{p}{q}}\right)$

$\therefore \quad (a^m b^m)^q = \left(a^{\frac{p}{q}} . b^{\frac{p}{q}}\right)^q$

$= \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q \times \left(b^{\frac{p}{q}}\right)^q$ [নিয়ম 4 দেখ]

$= a^p \times b^p$ [নিয়ম 3 দেখ]

$= (ab)^p$

$\therefore \quad a^m b^m = (ab)^{\frac{p}{q}} = (ab)^m$.

নিয়ম 7. যদি m একটি ঋণাত্মক রাশি হয়, তবে প্রমাণ কর যে $a^m b^m = (ab)^m$.

মনে কর $m = -p$ (p একটি ধনাত্মক রাশি)।

এক্ষণে, $a^m b^m = a^{-p} b^{-p} = \frac{1}{a^p} \times \frac{1}{b^p}$ [নিয়ম 2 (ii) দেখ]

$= \frac{1}{(ab)^p} = (ab)^{-p} = (ab)^m$.

উদাহরণমালা 7

উদা. 1. Find the product of $a^{\frac{1}{2}}. a^{\frac{1}{4}}.a$.

$a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{4}}.a = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+1} = a^{\frac{7}{4}}$.

উদা. 2. Find the value of $a^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{2}}.a^{-\frac{1}{6}} \div a^{\frac{2}{3}}$.

প্রদত্ত রাশি $= a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}} = a^0 = 1$.

উদা. 3. Simplify $\left(x^2 y\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(x^3\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(x^{-4} y^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

প্রদত্ত রাশি $= x^{2\times\frac{1}{4}}.y^{1\times\frac{1}{4}}.x^{3\times\frac{1}{2}}.x^{-4\times\frac{1}{2}}.y^{-1\times\frac{1}{2}}$

$$= x^{\frac{1}{2}}.y^{\frac{1}{4}}.x^{\frac{3}{2}}x^{-2}.y^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-2}.y^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} = x^{\circ}y^{-\frac{1}{4}}$$

$$= 1\times y^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{y^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{y}}$$

উদা. 4. Find the value of $\sqrt[3]{27^2}$.

$$\sqrt[3]{27^2} = (27)^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{3\times\frac{2}{3}} = 3^2 = 9.$$

উদা. 5. Find the value of $32^{-\frac{4}{5}}$.

$$32^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{32^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{(2^5)^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{2^{5\times\frac{4}{5}}} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

উদা. 6. Simplify $4a^{-\frac{3}{4}} \div 3b^{-\frac{2}{3}}$.

$$4a^{-\frac{3}{4}} \div 3b^{-\frac{2}{3}} = \frac{4a^{-\frac{3}{4}}}{3b^{-\frac{2}{3}}} = \frac{4\times\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}}{3\times\frac{1}{b^{\frac{2}{3}}}} = \frac{4}{3}\times\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{4\sqrt[3]{b^2}}{3\sqrt[4]{a^3}}.$$

[দ্রষ্টব্য : এখানে লবের 4 এর ঘাত-সূচক 1, $-\frac{3}{4}$ নহে ; যদি $(4a)^{-\frac{3}{4}}$ থাকিত, তবে 4 এর ঘাত-সূচকও $-\frac{3}{4}$ হইত। হরে 3 এর ঘাত-সূচকও 1.]

উদা. 7. Multiply

$a^{-1}+a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+b^{-1}$ by $a^{-1}-a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+b^{-1}$.

$$
\begin{array}{l}
a^{-1}+a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+b^{-1} \\
a^{-1}-a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+b^{-1} \\
\hline
a^{-2}+a^{-\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}b^{-1} \\
\qquad -a^{-\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}-a^{-1}b^{-1}-a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}} \\
\qquad\qquad +a^{-1}b^{-1}+a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}+b^{-2} \\
\hline
\text{গুণফল}=a^{-2} \qquad +a^{-1}b^{-1} \qquad +b^{-2}
\end{array}
$$

অথবা, $\left(a^{-1}+a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+b^{-1}\right)\left(a^{-1}-a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+b^{-1}\right)$

$=\left\{\left(a^{-1}+b^{-1}\right)+a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\right\}\left\{\left(a^{-1}+b^{-1}\right)-a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\right\}$.

$=(a^{-1}+b^{-1})^2-\left(a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\right)^2=a^{-2}+b^{-2}+2a^{-1}b^{-1}-a^{-1}b^{-1}$

$=a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2}$.

উদা. 8. Divide $x-3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-y$ by $x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$.

$$x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\Big)\, x-3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-y\,\Big(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$$

$$x-2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$$

$$-\ x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-y$$

$$-\ x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-y$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $=x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$.

উদা. 9. Find the product of

$$\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)\left(x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}\right).$$

প্রদত্ত রাশি $=\left(x^{2^{n-1}}\right)^2-\left(y^{2^{n-1}}\right)^2=x^{2^{n-1}\times 2^1}-y^{2^{n-1}\times 2^1}$

$$=x^{2^{n-1+1}}-y^{2^{n-1+1}}=x^{2^n}-y^{2^n}.$$

[দ্রষ্টব্য : $2n$ এবং 2^n এক নহে। $2n$ এর অর্থ n এর সহিত 2 এর গুণফল এবং 2^n এর অর্থ 2 এর n ঘাত। $2^{n-1}\times 2=2^{n-1+1}=2^n$, সুতরাং $x^{2^{n-1}}$ কে বর্গ করিলে x^{2^n} হয়।]

উদা. 10. Divide $x^{2^n}-y^{2^n}$ by $x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}$. [C. U.]

$$\frac{x^{2^n}-y^{2^n}}{x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}}=\frac{\left(x^{2^{n-1}}\right)^2-\left(y^{2^{n-1}}\right)^2}{x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}}$$

$$=\frac{\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)\left(x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}\right)}{x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}}=x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}.$$

উদা. 11. Factorize $a+b$.

$$a+b=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3=\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right).$$

উদা. 12. Simplify $\left(\frac{a^l}{b^m}\right)^n\left(\frac{b^n}{c^l}\right)^m\left(\frac{c^m}{a^n}\right)^l$. [C. U. '31]

প্রদত্ত রাশি $=\frac{a^{ln}}{b^{mn}}\times\frac{b^{nm}}{c^{ml}}\times\frac{c^{ml}}{a^{nl}}=1.$

উদা. 13. Simplify $(x^a)^{b-c}(x^b)^{c-a}(x^c)^{a-b}$. [C. U. '33]

প্রদত্ত রাশি $=x^{ab-ac}.x^{bc-ab}.x^{ac-bc}$

$=x^{ab-ac+bc-ab+ac-bc}=x^0=1.$

উদা. 14. Simplify $\left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m}.\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n}.\left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l}$.

[C. U. '16, '21, '24 ; D. B. '25, '30 ; G. U. '48, '50]

প্রদত্ত রাশি $=(x^{l-m})^{l+m}.(x^{m-n})^{m+n}.(x^{n-l})^{n+l}$

$=x^{l^2-m^2}.x^{m^2-n^2}.x^{n^2-l^2}=x^{l^2-m^2+m^2-n^2+n^2-l^2}=x^0=1.$

[দ্রষ্টব্য : $\frac{x^l}{x^m}$-এর অর্থ x^l কে x^m দ্বারা ভাগ। ভাগে সূচকের বিয়োগ হয়, সুতরাং $\frac{x^l}{x^m}=x^{l-m}$ হইল। এইভাবে করিতে হইবে।]

উদা. 15. Simplify

$$\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2}\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2}\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+ca+a^2}. \quad \text{[C. U.]}$$

প্রদত্ত রাশি $=\left(x^{a-b}\right)^{a^2+ab+b^2}\times\left(x^{b-c}\right)^{b^2+bc+c^2}\times\left(x^{c-a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$=x^{a^3-b^3}.x^{b^3-c^3}.x^{c^3-a^3}=x^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}$
$=x^0=1.$

উদা. 16. Simplify $\dfrac{(bc)^{b-c}(ca)^{c-a}(ab)^{a-b}}{(a^{b-c}b^{c-a}c^{a-b})^{-1}}$. [D. B. '45]

প্রদত্ত রাশি $=b^{b-c}.c^{b-c}.c^{c-a}.a^{c-a}.a^{a-b}.b^{a-b}$
$\times a^{b-c}.b^{c-a}.c^{a-b}$

$=a^{a-b+b-c+c-a}.b^{b-c+a-b+c-a}.c^{b-c+c-a+a-b}$

$=a^0.b^0.c^0=1\times1\times1=1.$

[দ্রষ্টব্য : $\because \dfrac{1}{a^{-2}}=a^2$ হয়, $\therefore$ এখানে সমগ্র হরের ঘাত ঋণাত্মক অর্থাৎ -1 বলিয়া, তাহাকে লব করিয়া লিখিলে ঘাত ধনাত্মক হইবে।]

উদা. 17. Simplify $\sqrt[bc]{\dfrac{x^b}{x^c}}\times\sqrt[ca]{\dfrac{x^c}{x^a}}\times\sqrt[ab]{\dfrac{x^a}{x^b}}$.

[C. U. '20, '41 ; W. B. S. F. '52 ; D. B. '28, '49]

প্রদত্ত রাশি $=\sqrt[bc]{x^{b-c}}.\sqrt[ca]{x^{c-a}}.\sqrt[ab]{x^{a-b}}$

$=x^{\frac{b-c}{bc}}.x^{\frac{c-a}{ca}}.x^{\frac{a-b}{ab}}=x^{\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}+\frac{a-b}{ab}}$

$=x^{\frac{ab-ac+bc-ab+ac-bc}{abc}}=x^{\frac{0}{abc}}=x^0=1.$

[দ্রষ্টব্য : প্রথমটি দেখ। Root-চিহ্নের ভিতরটি প্রথমে কষিয়া হইল $\sqrt[bc]{x^{b-c}}$ ইহা দ্বারা বুঝায় bc^{th} root of x^{b-c} এবং উহাকে $x^{\frac{b-c}{bc}}$ এইভাবে লেখা যায়।]

উদা. 18. Simplify $\frac{a^{\frac{3}{2}}+ab}{ab-b^3}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$. [C. U. '24]

প্রদত্ত রাশি $=\frac{a(a^{\frac{1}{2}}+b)}{b(a-b^2)}-\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b}=\frac{a(a^{\frac{1}{2}}+b)}{b(a^{\frac{1}{2}}+b)(a^{\frac{1}{2}}-b)}-\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b}$

$=\frac{a}{b(a^{\frac{1}{2}}-b)}-\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b}=\frac{a-a^{\frac{1}{2}}b}{b(a^{\frac{1}{2}}-b)}$

$=\frac{a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-b)}{b(a^{\frac{1}{2}}-b)}=\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b}=\frac{\sqrt{a}}{b}$.

[দ্রষ্টব্য : এখানে $a-b^2=(a^{\frac{1}{2}})^2-(b)^2=(a^{\frac{1}{2}}+b)(a^{\frac{1}{2}}-b)$ হইল ।]

উদা. 19. Simplify $\left\{\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^4}}\times\sqrt{\frac{y^3}{x^5}}\right\}^{12}\times x^{22}$. [M.U. 1894]

প্রদত্ত রাশি $=\left\{\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{4}{3}}}\times\frac{y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{5}{2}}}\right\}^{12}\times x^{22}=\frac{x^{\frac{2}{3}\times 12}\cdot y^{\frac{3}{2}\times 12}}{y^{\frac{4}{3}\times 12}\cdot x^{\frac{5}{2}\times 12}}\times x^{22}$

$=\frac{x^8y^{18}\times x^{22}}{y^{16}x^{30}}=\frac{x^{30}y^{18}}{y^{16}x^{30}}=y^{18-16}=y^2$.

উদা. 20. Simplify $\sqrt[5]{a^8\sqrt{a^8\sqrt{a^{-8}}}}$.

প্রদত্ত রাশি $=\sqrt[5]{a^8\sqrt{a^8\times a^{-4}}}=\sqrt[5]{a^8\sqrt{a^4}}=\sqrt[5]{a^8.a^2}$

$=\sqrt[5]{a^{10}}=a^{\frac{10}{5}}=a^2$.

উদা. 21. Simplify $\left\{\frac{4^{m+\frac{1}{4}}\times\sqrt{2.2^m}}{2\sqrt{2^{-m}}}\right\}^{\frac{1}{m}}$. [C. U. '47]

প্রদত্ত রাশি $=\left\{\frac{(2^2)^{m+\frac{1}{4}}\times\sqrt{2^{m+1}}}{2.2^{-\frac{m}{2}}}\right\}^{\frac{1}{m}}=\left\{\frac{2^{2m+\frac{1}{2}}.2^{\frac{m+1}{2}}}{2^{1-\frac{m}{2}}}\right\}^{\frac{1}{m}}$

$$= \left\{\frac{2^{2m+\frac{1}{2}+\frac{m+1}{2}}}{2^{\frac{2-m}{2}}}\right\}^{\frac{1}{m}} = \left\{2^{2m+\frac{1}{2}+\frac{m+1}{2}-\frac{2-m}{2}}\right\}^{\frac{1}{m}}$$

$$= \left\{2^{\frac{4m+1+m+1-2+m}{2}}\right\}^{\frac{1}{m}} = \left\{2^{3m}\right\}^{\frac{1}{m}} = 2^3 = 8.$$

উদা. 22. Simplify $\dfrac{2^{m+1}.3^{2m-n}.5^{m+n}.6^n}{15^m.10^{n+2}.6^m}$ [P. U. 1918]

প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{2^{m+1}.3^{2m-n}.5^{m+n}.2^n.3^n}{3^m.5^m.2^{n+2}.5^{n+2}.2^m.3^m} = \dfrac{2^{m+n+1}.3^{2m}.5^{m+n}}{3^{2m}.2^{m+n+2}.5^{m+n+2}}$

$= 2^{m+n+1-m-n-2}.5^{m+n-m-n-2} = 2^{-1}.5^{-2} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{50}.$

[দ্রষ্টব্য ঃ $6^m = (2\times 3)^m = 2^m.3^m$ এইভাবে লেখা যায়।]

উদা. 23. Simplify $\dfrac{3^p4^q6^r}{2^{r+q}12^{r+p}}$. [C. U. 1935]

প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{3^p.(2^2)^q\,2^r.3^r}{2^{r+q}.(2^2.3)^{r+p}} = \dfrac{3^{p+r}.2^{2q+r}}{2^{r+q}.2^{2r+2p}.3^{r+p}}$

$= \dfrac{3^{p+r}.2^{2q+r}}{2^{3r+2p+q}.3^{r+p}} = 2^{2q+r-3r-2p-q} = 2^{q-2r-2p}$

উদা. 24. Simplify $\dfrac{2^a(2^{a-1})^a}{2^{a+1}.2^{a-1}}\left\{\dfrac{8^{\frac{a}{3}}}{4}\right\}^{-a}$. [E. B. S. B. 1951

প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{2^a.2^{a^2-a}}{2^{a+1+a-1}}\left\{\dfrac{(2^3)^{\frac{a}{3}}}{2^2}\right\}^{-a} = \dfrac{2^{a+a^2-a}}{2^{2a}}\left\{\dfrac{2^a}{2^2}\right\}^{-a}$

$= \dfrac{2^{a^2}}{2^{2a}}(2^{a-2})^{-a} = 2^{a^2-2a}.2^{-a^2+2a} = 2^{a^2-2a-a^2+2a} = 2^0 = 1.$

উদা. 25. Simplify $\sqrt[bc]{\dfrac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}}\;\sqrt[ca]{\dfrac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}}\;\sqrt[ab]{\dfrac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}}$. [C.U. '38

প্রদত্ত রাশি $= \sqrt[bc]{x^{\frac{b}{c}-\frac{c}{b}}}\;\sqrt[ca]{x^{\frac{c}{a}-\frac{a}{c}}}\;\sqrt[ab]{x^{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}}$

$$=\sqrt[bc]{x^{\frac{b^2-c^2}{bc}}}\cdot\sqrt[ca]{x^{\frac{c^2-a^2}{ca}}}\cdot\sqrt[ab]{x^{\frac{a^2-b^2}{ab}}}$$

$$=x^{\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}}\cdot x^{\frac{c^2-a^2}{c^2a^2}}\cdot x^{\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}}=x^{\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}+\frac{c^2-a^2}{c^2a^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}}$$

$$=(x)^{\frac{a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2-a^2b^2+a^2c^2-b^2c^2}{a^2b^2c^2}}$$

$$=x^{\frac{0}{a^2b^2c^2}}=x^0=1.$$

[দ্রষ্টব্য : $\sqrt[bc]{x^{\frac{b^2-c^2}{bc}}}=\left(x^{\frac{b^2-c^2}{bc}}\right)^{\frac{1}{bc}}=x^{\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}}$]

উদা. 26. Simplify $\frac{a^2}{(1-a)^n}+\frac{2}{(1-a)^{n-1}}-\frac{1}{(1-a)^{n-2}}$.

[এখানে হরে $(1-a)$ এর বিভিন্ন ঘাত আছে, তন্মধ্যে n বৃহত্তম ঘাত, সুতরাং হরের ল. সা. গু. $(1-a)^n$ হইবে।]

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\frac{a^2+2(1-a)-(1-a)^2}{(1-a)^n}=\frac{a^2+2-2a-1+2a-a^2}{(1-a)^n}$$

$$=\frac{1}{(1-a)^n}.$$

[দ্রষ্টব্য : ভাগে ঘাতসূচকগুলির বিয়োগ হয়, $\therefore$ $(1-a)^n$ কে $(1-a)^{n-1}$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল $(1-a)^{n-n+1}=(1-a)^1=1-a$ হয়।]

উদা. 27. Simplify $\dfrac{\left(p^2-\frac{1}{q^2}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2-\frac{1}{p^2}\right)^q\left(q+\frac{1}{p}\right)^{p-q}}$. [B. U. 1891]

$$\text{প্রদত্ত ভগ্নাংশ}=\frac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q+\frac{1}{p}\right)^q\left(q-\frac{1}{p}\right)^q\left(q+\frac{1}{p}\right)^{p-q}}$$

$$=\frac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^{p+a-p}}{\left(q-\frac{1}{p}\right)^a\left(q+\frac{1}{p}\right)^{a+p-a}}=\frac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^a}{\left(q-\frac{1}{p}\right)^a\left(q+\frac{1}{p}\right)^p}$$

$$=\frac{\left(\frac{pq+1}{q}\right)^p\left(\frac{pq-1}{q}\right)^a}{\left(\frac{pq-1}{p}\right)^a\left(\frac{pq+1}{p}\right)^p}=\frac{(pq+1)^p}{q^p}\times\frac{(pq-1)^a}{q^a}\div\frac{(pq-1)^a}{p^a}\cdot\frac{(pq+1)^p}{p^p}$$

$$=\frac{(pq+1)^p(pq-1)^a}{q^{p+a}}\times\frac{p^{p+a}}{(pq-1)^a(pq+1)^p}$$

$$=\frac{p^{p+a}}{q^{p+a}}=\left(\frac{p}{q}\right)^{p+a}.$$

উদা. 28. Simplify :

$$\frac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}}+\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{c-b}}+\frac{1}{1+x^{a-c}+x^{b-c}}.$$

[C. U. '26, '40 ; D. B. '29 ; E. B. S. B. '5

প্রথম পদের লব ও হরকে x^a দ্বারা, দ্বিতীয় পদের লব ও হরকে x^b দ্বারা, এবং তৃতীয় পদের লব ও হরকে x^c দ্বারা গুণ করিয়া পাই, প্রদত্ত রাশি

$$=\frac{x^a}{x^a+x^b+x^c}+\frac{x^b}{x^b+x^a+x^c}+\frac{x^c}{x^c+x^a+x^b}=\frac{x^a+x^b+x^c}{x^a+x^b+x^c}=1.$$

[দ্রষ্টব্য : এইরূপ অঙ্কে সব হরগুলি সমান করিবার জন্য কোন্‌টিকে কি দিয়া গুণ করিতে হইবে তাহা স্থির করিয়া লইবে।]

উদা. 29. Simplify :

$$\frac{1}{1+x^{a-r}+x^{a-p}}+\frac{1}{1+x^{r-p}+x^{r-a}}+\frac{1}{1+x^{p-a}+x^{p-r}}.$$

[P. U. 1903]

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{x^{-a}}{x^{-a}(1+x^{a-r}+x^{a-p})}+\dfrac{x^{-r}}{x^{-r}(1+x^{r-p}+x^{r-a})}$

$$+\frac{x^{-p}}{x^{-p}(1+x^{p-a}+x^{p-r})}$$

$$=\frac{x^{-q}}{x^{-q}+x^{-r}+x^{-p}}+\frac{x^{-r}}{x^{-r}+x^{-p}+x^{-q}}+\frac{x^{-p}}{x^{-p}+x^{-q}+x^{-r}}$$

$$=\frac{x^{-p}+x^{-q}+x^{-r}}{x^{-p}+x^{-q}+x^{-r}}=1.$$

F 23. সূচক সম্বন্ধীয় অভেদাবলী

উদাহরণমালা 8

উদা. 1. If $x^y=y^x$, show that $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}=x^{\frac{x}{y}-1}$; and if $x=2y$, ›w that $y=2$. [C. U. '28, '49 ; A. U. '16 ; D. B. '50]

$\because\quad x^y=y^x,\ \therefore\ x^{\frac{y}{y}}=y^{\frac{x}{y}}$, বা, $x=y^{\frac{x}{y}}$

এক্ষণে, $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}=\frac{x^{\frac{x}{y}}}{y^{\frac{x}{y}}}=\frac{x^{\frac{x}{y}}}{x}=x^{\frac{x}{y}-1}$.

আবার, $\because\quad x=2y$, এবং $x^y=y^x$ (প্রদত্ত সর্ত)

$\therefore\quad x^y=y^x$, বা $(2y)^y=y^{2y}$, বা, $(2y)^y=(y^2)^y$,

$\therefore\quad y^2=2y,\quad \therefore\quad y=2.$

[দ্রষ্টব্য : যদি $a^x=b^x$ হয়, তবে $a=b$, এবং যদি $a^x=a^y$ হয়, তবে $x=y$ হইবে। অর্থাৎ দুইটি সমান সংখ্যা বা রাশির ঘাত শূন্য ভিন্ন একই থাকিলে তাহাদের মূলদ্বয় (অর্থাৎ যাহাদের ঘাত তাহারা) সমান হইবে। আবার যদি উহাদের মূলদ্বয় (1 ভিন্ন) একই থাকে, তবে ঘাত দুইটি সমান হইবে। এখানে দেখ $(2y)^y$ এবং $(y^2)^y$ সমান বলিয়া এবং উভয়েরই ঘাত y বলিয়া উভয়ের মূল দুইটি অর্থাৎ $2y$ এবং y^2 সমান বুঝিতে হইবে।]

উদা. 2. If $m=a^x$, $n=a^y$ and $a^2=(m^y n^x)^z$, show that $xyz=1$. [B. U. 1890]

এখানে $a^2=(m^y n^x)^z=m^{yz} n^{xz}=(a^x)^{yz}.(a^y)^{xz}$

[m ও n এর মান বসাইয়া]

$=a^{xyz}.a^{xyz}=a^{2xyz}$, বা, $a^2=a^{2xyz}$

$\therefore\ 2xyz=2$, $\therefore\ xyz=1$.

উদা. 3. If $a^x=b$, $b^y=c$, $c^z=a$, prove that $xyz=1$. [C. U. 1906]

এখানে $a=c^z=(b^y)^z=b^{yz}=(a^x)^{yz}=a^{xyz}$,

বা, $a^1=a^{xyz}$, $\therefore\ xyz=1$.

উদা. 4. If $a^x=b^y$ and $b^x=a^y$, then $a=b$.

$\because\ a^x=b^y\cdots\cdots(1)$ এবং $a^y=b^x\cdots\cdots(2)$

$\therefore$ (1) × (2) করিয়া পাই $a^{x+y}=b^{x+y}$, $\therefore\ a=b$.

উদা. 5. If $x^{\frac{1}{a}}=y^{\frac{1}{b}}=z^{\frac{1}{c}}$ and $xyz=1$, prove that $a+b+c=0$.

$x^{\frac{1}{a}}=y^{\frac{1}{b}}=z^{\frac{1}{c}}=k$ (মনে কর)

$\therefore\ \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^a=k^a$, বা, $x=k^a$,

অনুরূপে $y=k^b$ এবং $z=k^c$.

আবার, $\because\ xyz=1$, $\therefore\ k^a.k^b.k^c=1$, বা, $k^{a+b+c}=1=k^0$,

$\therefore\ a+b+c=0$.

উদা. 6. If $a=x^{q+r}y^p$, $b=x^{r+p}y^q$, $c=x^{p+q}y^r$, show that $a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=1$. [C. U. '51]

$a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=(x^{q+r}y^p)^{q-r}.(x^{r+p}y^q)^{r-p}.(x^{p+q}y^r)^{p-q}$

$=x^{q^2-r^2}.y^{pq-pr}.x^{r^2-p^2}.y^{qr-pq}.x^{p^2-q^2}.y^{rp-rq}$

$=x^{q^2-r^2+r^2-p^2+p^2-q^2}.y^{pq-pr+qr-pq+pr-qr}$

$=x^0.y^0=1\times1=1$.

উদা. 7. If $x=3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}$, prove that $3x^3+9x=8$. [Pat. '30]

এখানে $x^3=\left(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}\right)^3$

$$=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3-3.\,3^{\frac{1}{3}}.\,3^{-\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}\right)$$

বা, $x^3=3-3^{-1}\ \ 3.3^0(x)$ $\left[\because\ 3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}=x\right]$

বা, $x^3=3 \ldots -3x$, বা, $x^3=\frac{8}{3}-3x$, বা, $3x^3=8-9x$

$\therefore\ 3x^3+9x=8.$

উদা./ If $x=2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$, prove that $x^3-6x^2+6x-2=0$
[C. U. '30, '36, '42, '50 ; D. B. '42]

$\because\ x=2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$,

$\therefore\ x-2=2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$, $\therefore\ (x-2)^3=\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)^3$

বা, $x^3-6x^2+12x-8$

$$=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3+\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3+3.2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$=2^2+2+3.2.(x-2)\quad\left[\because\ x-2=2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right]$$

বা, $x^3-6x^2+12x-8=6+6x-12$

বা, $x^3-6x^2+12x-8-6-6x+12=0$

$\therefore\ x^3-6x^2+6x-2=0.$

উদা. 9. If $a^{m^n}=(a^m)^n$, find m in terms of n. [Pat. 18]

$\because\ a^{m^n}=(a^m)^n$ $\quad\therefore\ a^{m^n}=a^{mn}$. $\quad\therefore\ m^n=mn$,

বা, $\frac{m^n}{m}=n$, $\quad$ বা, $m^{n-1}=n$, $\therefore\ m=n^{\frac{1}{n-1}}$.

া. 10. If $p^x=q^y=r^z$ and $q^2=pr$,

show that $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$.

[এখানে প্রথমে p ও rকে q এর term-এ প্রকাশ কর।]

$\because\ p^x = q^y,\ \therefore\ p = q^{\frac{y}{x}}$, এবং $\because\ r^z = q^y,\quad r = q^{\frac{y}{z}}$

আবার, $\because\ q^2 = pr,\ \therefore\ q^2 = q^{\frac{y}{x}}.q^{\frac{y}{z}} = q^{\frac{y}{x}+\frac{y}{z}}$

$\therefore\ \frac{y}{x}+\frac{y}{z} = 2,\ \therefore\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z} = \frac{2}{y}$. [y দ্বারা ভাগ করিয়া]

উদা. 11 Prove that $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdots\cdots\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right) = \frac{x^{2^n} - y^{2^n}}{x-y}$. [C. U. 1945]

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdots\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)}{x-y}$$

$$= \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdots\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)}{x-y}$$

$$= \frac{(x^4-y^4)(x^4+y^4)\cdots\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)}{x-y}$$

এইরূপে শেষ পর্যন্ত গুণ করিয়া পাই,

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{\left(x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}\right)\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)}{x-y}$$

$$= \frac{\left(x^{2^{n-1}}\right)^2-\left(y^{2^{n-1}}\right)^2}{x-y} = \frac{x^{2^n}-y^{2^n}}{x-y}.$$

[সূচকীয় সমীকরণ দ্বিঘাত সমীকরণ অধ্যায়ে দেখ।]

Exercise 6

Find the value of the following :—

1. $27^{\frac{2}{3}}$. 2. $9^{-\frac{3}{2}}$. 3. $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{5}{4}}$. 4. $\sqrt[5]{32^4}$ [P.U. '0[illegible]

5. $243^{-\frac{2}{5}}$. 6. $\sqrt[4]{(625)^3}$.

Simplify the following :

7. $x^{-\frac{2}{3}} \div x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{4}}$.

8. $\left\{\left(x^{-3}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{-\frac{1}{2}}$.

9 $8a^{-\frac{3}{4}} \div 6b^{-\frac{2}{3}} \times \frac{1}{2}ab$.

10. $x^{\frac{1}{3}}.x^{-\frac{1}{4}}.x^{\frac{1}{2}} \div x^{\frac{7}{12}}$.

11. $\left(a^2b^2\right)^{-\frac{1}{6}} \times \left(a^2\right)^{\frac{1}{4}} \div \left(b^3\right)^{\frac{1}{9}}$.

12. $\dfrac{\frac{1}{4^{-3}} - \frac{2}{10^{-2}}}{\frac{1}{2^{-2}} + \frac{1}{4^{-1}}}$.

13. $\sqrt[4]{a^2b^3} \div \sqrt[3]{a^4b^6} \times \left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}}\right)^{-4}$.

14. $\sqrt[3]{\quad b^6} \times \sqrt[4]{a^2.b^{-8}}$.

15. $\sqrt[3x]{a^4} \div \sqrt[5x]{a^{-4}}$.

16. $\sqrt{a^2.\sqrt[3]{a^{-2}}}$

17. $\left(\dfrac{x^{-3}y^4}{x^2y^{-1}}\right)^{\frac{3}{5}} \div \left(\dfrac{x^2y^3}{x^{-3}y^4}\right)^2$.

17.(a). $\left\{\sqrt[3]{4} \times \dfrac{1}{\sqrt[6]{8}} \times \sqrt[12]{2^{-1}}\right\}^{\frac{1}{4}}$ [Pat. '23]

18. (1) Multiply $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} + 1$ by $x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}} - 1$; [C. U. '33]

[Pat. '29]

(ii) Divide $a^2 + 6ac^{\frac{1}{3}} - 4b + 9c^{\frac{2}{3}}$ by $a - 2b^{\frac{1}{2}} + 3c^{\frac{1}{3}}$.

19. Find the product of $(x^n - y^{-n})(x^n + y^{-n})$.

20. Multiply $a^{-m} + b^n$ by $a^{-2m} - a^{-m}b^n + b^{2n}$.

21. Divide $x^{3^n} - y^{3^n}$ by $x^{3^{n-1}} - y^{3^{n-1}}$.

22. Resolve into factors $a - b$, which is the difference of ro squares or cubes.

23. Factorize $x^{2m} - y^{2n}$.

Simplify the following :

24. $\dfrac{x^{a+b}.x^{a-b}.x^{c-2a}}{x^{c-a}}$. [C. U. 1870]

25. $(a+b)^m \times (a-b)^m \times (a^2+b^2)^m$. [M. U. 1889]

26. $\left(a^{n^2-1}\right)^{\frac{n}{n+1}} \times \dfrac{\sqrt{a^{2n}}}{a}$.

27. $\{(x^{a+b-c} \times x^{a-b+c})^b\}^c$. [M. U.]

28. $\left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \div \left(\dfrac{x^a}{x^{a-b}}\right)^{\frac{a^2}{b}}$ [M. U. 1890]

29. $\left(\dfrac{x^p}{x^q}\right)^{p+q} \div \left(\dfrac{x^{p+q}}{x^{p-q}}\right)^{\frac{p^2}{q}}$ [C. U 1902]

30. $\left(\dfrac{x^m}{x^n}\right)^{m+n-l} \times \left(\dfrac{x^n}{x^l}\right)^{n+l-m} \times \left(\dfrac{x^l}{x^m}\right)^l$

31. $\left\{\dfrac{\left(9^{n+\frac{1}{4}}\right)\sqrt{3}.3^n}{3\sqrt{3^{-n}}}\right\}^{\frac{1}{n}}$. [C. U. '25 ; W. B. S. F. '58]

32. $\left(\dfrac{x^{m^2+n^2}}{x^{-mn}}\right)^{m-n} \times \left(\dfrac{x^{n^2+l^2}}{x^{-nl}}\right)^{n-l} \times \left(\dfrac{x^{l^2+m^2}}{x^{-lm}}\right)^{l-m}$.

33. $\left(x^{\frac{b+c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}} \times \left(x^{\frac{c+a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}} \times \left(x^{\frac{a+b}{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-a}}$.

34. $\dfrac{(p+\frac{1}{q})^m(p-\frac{1}{q})^n}{(q+\frac{1}{p})^m(q-\frac{1}{p})^n}$. [B. U.]

35. $\sqrt[a-c]{x^{\frac{1}{a-b}}} \times \sqrt[b-a]{x^{\frac{1}{b-c}}} \times \sqrt[c-b]{x^{\frac{1}{c-a}}}$.

36. $\dfrac{2^{m+2}.3^{2m-n}.5^{m+n+2}.6^n}{6^m.10^{n+2}.15^m}$. [G. U. '51]

37. $\dfrac{2^n.6^{m+1}.10^{m-n}.15^{m+n-2}}{4^m.3^{2m+n}.25^{m-1}}$. [P. U. '20]

38. $\dfrac{e^{2x}+e^{-x}-e^x-1}{e^{2x}-e^{-x}+e^x-1}$.

39. $\dfrac{1}{1+x^{m-n}+x^{m-p}}+\dfrac{1}{1+x^{n-p}+x^{n-m}}+\dfrac{1}{1+x^{p-m}+x^{p-n}}$.

[C. U. '37, '42 ; G. U. '49 ; E. B. S. B. '51]

40. $(1+x^{a-b}+x^{a-c})^{-1}+(1+x^{b-c}+x^{b-a})^{-1}$
$+(1+x^{c-a}+x^{c-b})^{-1}$.

41. $\dfrac{\left\{(a^m)^{\frac{1}{r}}(a^a)^{\frac{1}{n}}\right\}^{nr}}{\left\{\sqrt[a]{b^n}(\sqrt[m]{b})^r\right\}^{ma}} \div \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^a\right\}^r.$ [D. B. '23, '50]

42. $\dfrac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \dfrac{x+1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$

42. (a). $\left(a^{\frac{1}{x-y}}\right)^{\frac{1}{x-z}} \times \left(a^{\frac{1}{y-z}}\right)^{\frac{1}{y-x}} \times \left(a^{\frac{1}{z-x}}\right)^{\frac{1}{z-y}}.$ [W. B. S. F. '53]

43. $\dfrac{1}{(4x^3-3x)^2}\left\{\dfrac{\dfrac{3\sqrt{1-x^2}}{x}-\dfrac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}}{1-3\left(\dfrac{1-x^2}{x^2}\right)}\right\}.$ [C. U.]

44. If $m^n=n^m$, show that $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}=m^{\frac{m}{n}-1}$.

45. If $x^2=y^3$, prove that $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{3}}$.

46. If $a^x=z^y$ and $a^z=z^x$, then $x^2=yz$.

47. If $\left(x^{n^2}\right)^n=\left(x^{2^n}\right)^2$, then $\sqrt[n+1]{n^3}=2$.

48. If $p=a^x$, $q=a^y$ and $(p^yq^x)^z=a^2$, prove that $xyz=1$. [C. U. '29, '50 ; D. B. '37 ; Pat '19, '21]

49. If $x^{\frac{1}{a}}=y^{\frac{1}{b}}=z^{\frac{1}{c}}$ and $xyz=1$, prove that $a+b+c=0$.

50. If $x=2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}$, show that $2x^3-6x=5$.

51. If $x=1+3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$, prove that $x^3-3x^2-6x-4=0$

52. If $y=x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}$, then $y^3+3y=x-\frac{1}{x}$.

53. If $x^a=y^b=z^c$ and $y^2=xz$, prove that $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$.

54. If $x^{p^q}=\left(\sqrt[x]{p}\right)^q$, find p in terms of q.

Surds (করণী)

24. **অমেয় সংখ্যা :** আমরা দেখিতে পাই সকল সময়ে সমজাতীয় দুইটি রাশিকে উভয়ের কোন সাধারণ এককের (unit) দ্বারা প্রকাশ করা সম্ভব হয় না। 1 ইঞ্চি বাহুবিশিষ্ট বর্গের কর্ণ $\sqrt{2}$ ইঞ্চি দীর্ঘ। এস্থলে $\sqrt{2}$ এর মান যে-কোন দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত নির্ণয় করা যায় বটে, কিন্তু সেই মানকে কখনও একের ঠিক সম্পূর্ণ গুণিতক বা অংশরূপে প্রকাশ করা যায় না। অতএব, $\sqrt{2}$ ইঞ্চি একটি অমেয় (incommensurable) রাশি। এইরূপ রাশিকে অমেয় রাশি বলে।

25. **করণী :** যদি কোন রাশির কোন মূল সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা না যায়, তবে সেই মূলকে **করণী** (surd) বা **অমূলদ রাশি** (irrational quantity) বলে। যথা—(i) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$ ইহারা করণী বা অমূলদ রাশি; (ii) $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{x}$ এই বীজগণিতীয় রাশির মান ঠিকভাবে নির্ণয় করা যায় না, সুতরাং ইহাদিগকেও করণী বলে। হয়ত a ও x-এর মান এরূপ হইতে পারে যে $\sqrt{a}$ ও $\sqrt[3]{x}$ প্রকৃতপক্ষে করণী নহে, তথাপি $\sqrt{a}$ ও $\sqrt[3]{x}$কে করণী বলা হয়। সকল করণীই অমেয়।

দ্রষ্টব্য : যে সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণ সংখ্যার অনুপাতে প্রকাশ করা যায় না তাহাকেই অমূলদ সংখ্যা বলে। যথা, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$ ইত্যাদি।

26. **মূলদ সংখ্যা :** যে সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণ সংখ্যার অনুপাতে প্রকাশ করা যায় তাহাকে মূলদ সংখ্যা (rational number) বলে। যথা, $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$, ইত্যাদি। এখানে দেখ $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{27}$ ও $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$কে করণীর আকারে দেখা গেলেও উহারা প্রকৃতপক্ষে মূলদ সংখ্যা—করণী নহে। কারণ,

$\sqrt{4}=2$, $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$, $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}}=\frac{2}{3}$, সুতরাং উহারা মূলদ সংখ্যা।

27. **শুদ্ধ ও মিশ্র করণী :** যে করণীতে কোন মূলদ উৎপাদক থাকে না তাহাকে শুদ্ধ করণী (pure surd) বলে। যথা, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ইত্যাদি।

আর যে করণীতে কোন মূলদ উৎপাদক থাকে, তাহাকে মিশ্র করণী (mixed surd) বলে। যথা, $2\sqrt{3}$, $5\sqrt{7}$ ইত্যাদি।

28. **সরল ও যৌগিক করণী :** একটি মাত্র পদবিশিষ্ট করণীকে **সরল করণী** (simple surd) বলে। যথা, $\sqrt{3}$, $3\sqrt{5}$ ইত্যাদি। আর একাধিক করণী যদি, '+' বা '−' চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকে, তবে সেই রাশিকে **যৌগিক করণী** (compound surd) বলে। যথা, $\sqrt{3}+3\sqrt{5}$, $\sqrt{15}-\sqrt{3}$,

দুইটি করণী বা একটি করণী ও একটি মূলদ সংখ্যার বীজগণিতীয় সমষ্টিকে **দ্বিপদ করণী** (Binomial surd) বলে। যথা, $2\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $3+2\sqrt{2}$, $\sqrt{7}-\sqrt{3}$, ইত্যাদি।

ঐরূপে $\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $3+\sqrt{7}-\sqrt{2}$ প্রভৃতিকে **ত্রিপদ করণী** (Trinomial surd) বলে।

29. দ্বিপদবিশিষ্ট দুইটি করণীতে যদি পদ দুইটি একই হয় এবং উহাদের মধ্যবর্তী সংযোগ চিহ্নটি যদি পরস্পর বিপরীত (অর্থাৎ একটিতে '+' ও অন্যটিতে '−') হয়, তবে একটি করণীকে অন্য করণীটির **অনুবন্ধী করণী** (conjugate surd) বা **পূরক করণী** (complementary surd) বলে। যথা, $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ ও $\sqrt{5}-\sqrt{3}$; $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ও $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

30. **করণীর ক্রম** (Order) **:** করণীর মূল-সূচক সংখ্যা দ্বারা ইহার ক্রম প্রকাশিত হয়। যথা, $\sqrt{3}$ ও $2^{\frac{1}{2}}$ **দ্বিতীয় ক্রমের** (second order) করণী বা **দ্বিঘাত** (quadratic) করণী। ঐরূপ $\sqrt[3]{4}$ ও $5^{\frac{2}{3}}$ তৃতীয় (third) ক্রমের বা **ত্রিঘাত** (cubic) করণী। $\sqrt[n]{a}$ হইলে n-তম ক্রমের করণী, ইত্যাদি।

31. **সমমূলীয় করণী :** কতকগুলি করণী একই ক্রমের হইলে তাহাদিগকে সমমূলীয় (equiradical) করণী বলা হয়।

$\sqrt{}$; $\sqrt[3]{}$, প্রভৃতি চিহ্নগুলিকে radical sign বলে।

বিভিন্ন ক্রমের করণীকে সমমূলীয় করণীতে প্রকাশ করা যায়।

উদা. 1. $\sqrt[3]{x^2}$ ও $\sqrt[4]{x^3}$কে সমমূলীয় করণীতে পরিণত কর।

এখানে মূল জ্ঞাপক সংখ্যাগুলি 3 ও 4 উহাদের ল. সা. গু. = 12.

$$\therefore \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2 \times 4}{3 \times 4}} = x^{\frac{8}{12}} = \sqrt[12]{x^8}.$$

$$\text{এবং } \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{3 \times 3}{4 \times 3}} = \sqrt[12]{x^9}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় করণীগুলি হইল $\sqrt[12]{x^8}$ ও $\sqrt[12]{x^9}$.

কোন **মূলদ রাশিকে** যে-কোন ক্রমের করণীতে প্রকাশ করা যায়। যথা,
$x = \sqrt{x^2} = \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[n]{x^n}$

22. করণীর তুলনা : বিভিন্ন ক্রমের করণীর মধ্যে পরস্পর তুলনা করিয়া মানের ক্রম নির্ণয় করিতে হইলে করণীগুলিকে সমমূলীয় করণীতে পরিণত করিতে হয়।

উদা. 1. $\sqrt{5}$, ও $\sqrt[3]{9}$ ইহাদের মধ্যে কোনটি বৃহত্তর ?

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$$

$$\text{এবং } \sqrt[3]{9} = 9^{\frac{1}{3}} = 9^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{9^2} = \sqrt[6]{81}$$

$\therefore$ 125 > 81, $\therefore$ $\sqrt[6]{125}$ অর্থাৎ $\sqrt{5}$ বৃহত্তর।

উদা. 2 $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$ এবং $\sqrt[4]{8}$কে মানের ক্রম অনুসারে লিখ।

এখানে মূলজ্ঞাপক সংখ্যাগুলির অর্থাৎ 3, 2, 4 এর ল. সা. গু. = 12.

$$\text{এক্ষণে, } \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$$

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$$

$$\sqrt[4]{8} = 8^{\frac{1}{4}} = 8^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{8^3} = \sqrt[12]{512}$$

$\therefore$ মানের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে হইবে $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$.

33. করণীর সরলতম আকার : কোন কোন করণীকে একটি মূলদ রাশি ও একটি করণীর গুণফলরূপে প্রকাশ করা যায়। এইরূপে পরিবর্তিত আকারকে করণীটির সরলতম আকার (simplest form) বলে।

আবার, কোন মূলদরাশি ও একটি করণীর গুণফলকে একটি পূর্ণ করণীরূপে প্রকাশ করা যায়।

উদা. 1. $\sqrt{128}$ ও $\sqrt[3]{192}$কে সরলতম আকারে পরিণত কর।

$$\sqrt{128}=\sqrt{64\times2}=\sqrt{8^2\times2}=(8^2\times2)^{\frac{1}{2}}=(8^2)^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{2}}$$
$$=8\times2^{\frac{1}{2}}=8\sqrt{2}\ ;$$

$$\sqrt[3]{64\times3}=\sqrt[3]{4^3\times3}=4\sqrt[3]{3}.$$

উদা. 2. $3\sqrt{2}$ এবং $2\sqrt[3]{3}$কে পূর্ণ করণীরূপে প্রকাশ কর।

$$3\sqrt{2}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=9^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{2}}=(18)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{18}\ ;$$
$$2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{8\times3}=\sqrt[3]{24}.$$

34. সদৃশ ও অসদৃশ করণী : যে সকল করণীর একই অমূলদ উৎপাদক থাকে, অথবা যে করণীগুলিকে একই অমূলদ উৎপাদক বিশিষ্টরূপে প্রকাশ করা যায়, তাহাদিগকে সদৃশ (similar or like) করণী বলে।

যে করণীগুলি এরূপ নহে, তাহাদিগকে অসদৃশ (dissimilar or unlike) করণী বলে। যথা—

(i) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 5\sqrt{3}$ ইহারা সদৃশ করণী ; কারণ, এখানে প্রত্যেকটির অমূলদ উৎপাদক $\sqrt{3}$.

(ii) $\sqrt{12}$ ও $\sqrt{27}$ ইহারাও সদৃশ করণী ,
কারণ $\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}$, এবং $\sqrt{27}=\sqrt{9\times3}=3\sqrt{3}$.

(iii) $\sqrt{20}$ ও $\sqrt{75}$ ইহারা অসদৃশ করণী ; কারণ, $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ এবং $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$.

35. করণীর যোগ ও বিয়োগ : কতকগুলি করণীর যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে সেইগুলিকে সরলতম আকারে পরিণত করিবে। যদি ঐগুলি **সদৃশ করণী** হয়, তবে উহাদের মূলদ উৎপাদকগুলির যোগফলের সহিত ঐ অমূলদ উৎপাদকটি গুণ করিলেই নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যায়। আর যদি ঐ করণীগুলি **অসদৃশ** হয়, তবে উহাদের যোগফল একটি পদ হইবে না, ঐগুলি '+' চিহ্ন দিয়া লিখিবে মাত্র। বিয়োগের নিয়মও এই।

উদা. 1. $4\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$, ও $6\sqrt{2}$ এর সমষ্টি কত ?

নির্ণেয় সমষ্টি $=4\sqrt{2}+3\sqrt{2}+6\sqrt{2}=(4+3+6)\sqrt{2}=13\sqrt{2}$.

উদা. 2. $\sqrt{12}, -4\sqrt{3}$ ও $6\sqrt{3}$ এর সমষ্টি কত ?

নির্ণেয় সমষ্টি $=\sqrt{12}-4\sqrt{3}+6\sqrt{3}=2\sqrt{3}-4\sqrt{3}+6\sqrt{3}$

$=(2-4+6)\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

উদা. 3. $7\sqrt{2}$ ও $\sqrt{32}$ এর অন্তর কত ?

$7\sqrt{2}-\sqrt{32}=7\sqrt{2}-4\sqrt{2}=(7-4)\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

উদা. 4. $2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}$ এবং $4\sqrt{3}$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় যোগফল $=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+4\sqrt{3}=6\sqrt{3}+3\sqrt{2}$.

36. **করণীর গুণন :** (i) করণীগুলি **সমমূলীয় হইলে,** মূলদ ও অমূলদ উৎপাদকগুলির পৃথক্ পৃথক্ গুণ করিতে হয়। (ii) করণীগুলি **বিভিন্ন ক্রমের** হইলে, উহাদিগকে সমমূলীয় করণীতে পরিণত করিয়া পূর্বের ন্যায় গুণ করিতে হয়।

উদা. 1. (a) $3\sqrt{2}\times 4\sqrt{5}=12\sqrt{10}$ (b) $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\sqrt{9}=3$.

উদা. 2. $4\sqrt{3}\times 5\sqrt{6}=20\sqrt{18}=20\sqrt{9\times 2}=20\times 3\sqrt{2}=60\sqrt{2}$.

উদা. 3. $2\sqrt{5}\times\sqrt{32}\times 3\sqrt{2}=2\sqrt{5}\times 4\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}$

$=24\sqrt{5\times 2\times 2}=48\sqrt{5}$.

উদা. 4. $3\sqrt[3]{3}\times 2\sqrt[4]{2}=3\sqrt[12]{3^4}\times 2\sqrt[12]{2^3}=6\sqrt[12]{3^4\times 2^3}$

$=6\sqrt[12]{648}$.

(iii) **মিশ্র করণীসমূহের গুণন :** এইরূপ গুণনে বীজগণিতের মিশ্র রাশির গুণনের নিয়ম অনুসরণ করিতে হয়।

উদা. 1. $2\sqrt{3}+3\sqrt{4}$কে $3\sqrt{2}+\sqrt{3}$ দ্বারা গুণ কর।

গুণফল $=(2\sqrt{3}+3\sqrt{4})(3\sqrt{2}+\sqrt{3})=(2\sqrt{3}\times 3\sqrt{2})$

$+(3\sqrt{4}\times 3\sqrt{2})+(2\sqrt{3}\times\sqrt{3})+(3\sqrt{4}\times\sqrt{3})$

$=6\sqrt{6}+9\sqrt{8}+6+3\sqrt{12}=6\sqrt{6}+18\sqrt{2}+6+6\sqrt{3}$.

উদা. 2. $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$কে $2\sqrt{6}-4\sqrt{3}$ দিয়া গুণ কর।

গুণফল $=(3\sqrt{2}\times 2\sqrt{6})+(2\sqrt{5}\times 2\sqrt{6})-(3\sqrt{2}\times 4\sqrt{3})$
$-(2\sqrt{5}\times 4\sqrt{3})$

$=6\sqrt{12}+4\sqrt{30}-12\sqrt{6}-8\sqrt{15}$

$=12\sqrt{3}+4\sqrt{30}-12\sqrt{6}-8\sqrt{15}.$

[**দ্রষ্টব্য :** $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$ হয়, $\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$ হয়। সাধারণভাবে গুণ করিয়া গুণফলের করণীগুলির সরলতম আকারে পরিণত করিতে হয়।]

37. **করণী-নিরসন** (rationalisation) **:** (1) কোন করণীকে অন্য কোন রাশি বা উপযুক্ত করণী দ্বারা গুণ করিয়া মূলদ রাশিতে পরিণত করাকে করণী-নিরসন বলে। ঐ গুণক করণীকে **করণী-নিরসক** উৎপাদক বলে।

উদা. 1. $\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$ এবং $5^{\frac{1}{2}}\times 5^{\frac{1}{2}}=5$, সুতরাং $\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$ হয়।

$\therefore$ $\sqrt{5}$কে $\sqrt{5}$ দ্বারা বা $5^{\frac{1}{2}}$ দ্বারা গুণ করিলে করণী-নিরসন হয় এবং উহা মূলদ রাশিতে পরিণত হয়। এখানে করণী-নিরসক উৎপাদক $\sqrt{5}$.

উদা. 2. $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$; কিন্তু $2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}=2$, অর্থাৎ $2^{\frac{2}{3}}$কে $2^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা গুণ করিলে মূলদ সংখ্যা হয়। $\therefore$ $\sqrt[3]{4}$কে $\sqrt[3]{2}$ দ্বারা গুণ করিলে করণী-নিরসন হয়। এখানে $\sqrt[3]{2}$ হইল করণী-নিরসক উৎপাদক।

(2) অমূলদ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশের হরকে মূলদ রাশিতে পরিণত করিয়া হরের করণী-নিরসন করা হয়। এইরূপ করিতে হইলে হরকে যে করণী-নিরসক উৎপাদক দ্বারা গুণ করিবে, লবকেও তাহার দ্বারা গুণ করিতে হয়।

উদা. 1. $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}.$

উদা. 2. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}=\dfrac{2\times\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{3^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}}=\dfrac{2\sqrt[3]{9}}{3}.$

উদা. 3. $\dfrac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{(3+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}=\dfrac{(3+\sqrt{2})^2}{(3)^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\dfrac{9+2+6\sqrt{2}}{9-2}=\dfrac{11+6\sqrt{2}}{7}$

উদা. 4. $$\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}=\frac{(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})}{(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2}{(3\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2}=\frac{27+8-12\sqrt{6}}{27-8}=\frac{35-12\sqrt{6}}{19}.$$

উদা 5. $$\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}=\frac{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1})^2}{(\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1})(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1})}$$

$$=\frac{a+1+a-1+2\sqrt{a^2-1}}{(a+1)-(a-1)}=\frac{2a+2\sqrt{a^2-1}}{2}=a+\sqrt{a^2-1}.$$

38. **করণীর ভাগ :** করণীকে অন্য একটি করণী বা মিশ্র করণী দ্বারা ভাগ করিতে হইলে ভাগটিকে ভগ্নাংশের আকারে লিখিয়া হরটিকে পূর্বের ন্যায় মূলদ রাশিতে পরিণত করিতে হয়।

উদাহরণমালা 9

উদা 1. Find the value of $3\sqrt{48}-4\sqrt{75}+5\sqrt{192}$. [C.U '42]

প্রদত্ত রাশি $=3\sqrt{16\times3}-4\sqrt{25\times3}+5\sqrt{64\times3}=3\times4\sqrt{3}$

$-4\times5\sqrt{3}+5\times8\sqrt{3}=12\sqrt{3}-20\sqrt{3}+40\sqrt{3}=32\sqrt{3}.$

উদা 2. Prove that $\sqrt{175}-\sqrt{112}=\sqrt{7}$. [C. U. '23]

$\sqrt{175}-\sqrt{112}=\sqrt{25\times7}-\sqrt{16\times7}=5\sqrt{7}-4\sqrt{7}=\sqrt{7}.$

উদা. 3 Find the value of $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ correct to 2 places of decimals, when $\sqrt{2}=1{\cdot}414$.

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{2+1+2\sqrt{2}}{2-1}=3+2\sqrt{2}$$

$=3+2\times1{\cdot}414=3+2{\cdot}828=5{\cdot}828=5{\cdot}83$ (আসন্ন)।

উদা. 4. Bring $\frac{7}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}+1}$ to a form with a rational denominator. [B. U.]

প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=\frac{7(\sqrt{2}+1-\sqrt[4]{2})}{(\sqrt{2}+1+\sqrt[4]{2})(\sqrt{2}+1-\sqrt[4]{2})}$

$$=\frac{7(\sqrt{2}+1-\sqrt[4]{2})}{(\sqrt{2}+1)^2-(\sqrt[4]{2})^2}=\frac{7(\sqrt{2}+1-\sqrt[4]{2})}{3+2\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\frac{7(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}+1)}{3+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{7(3-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}+1)}{3^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{7(3-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}+1)}{7}$$

$$=(3-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}+1).$$

উদা. 5. Show that $\dfrac{a\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x}}=a+x\sqrt{ax+x^2}$. [B. U.]

$$\frac{a\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x}}=\frac{a\sqrt{a+x}(\sqrt{a+x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{a+x})^2-(\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{a(a+x)+a\sqrt{ax+x^2}}{a+x-x}=\frac{a(a+x+\sqrt{ax+x^2})}{a}$$

$$=a+x+\sqrt{ax+x^2}.$$

. 6 Simplify $\dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}-\dfrac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}$. [D. B. '28]

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})\times\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)\times\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}$

$$-\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})\times\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3(3-1)}-\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3(3-1)}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}-3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}=\frac{2\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

উদা. 7. Evaluate $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, when $x=3+2\sqrt{2}$. [P. U.'28]

$\because\ x=3+2\sqrt{2}=2+1+2\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^2$. $\therefore\ \sqrt{x}=\sqrt{2}+1$.

$$\therefore\ \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1-\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}$$

$$=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2.$$

উদা. 8. Find the value of $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$

when $x=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$. [C. U.]

$\because\ x=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}},\quad \therefore\ x^2=\frac{n-1}{n+1},$

$\therefore\ x^2-1=\frac{n-1}{n+1}-1=\frac{-2}{n+1}.$

একণে প্রদত্ত রাশি $=\left(\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}\right)^2-2\times\frac{x}{x-1}\times\frac{x}{x+1}$

$=\left(\frac{x^2+x+x^2-x}{x^2-1}\right)^2-2.\frac{x^2}{x^2-1}=\left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x^2-1}$

$=\left\{\frac{\frac{2(n-1)}{n+1}}{\frac{-2}{n+1}}\right\}^2-\frac{\frac{2(n-1)}{n+1}}{\frac{-2}{n+1}}=\{-(n-1)\}^2-\{-(n-1)\}$

$=(n-1)^2+(n-1)=(n-1)(n-1+1)=n(n-1).$

উদা. 9. Find the value of $\sqrt{a\sqrt[3]{b}\sqrt{a\sqrt[3]{b}\cdots\cdots}}$ continued to infinity. [B. U.]

মনে কর, $x=\sqrt{a\sqrt[3]{b}\sqrt{a\sqrt[3]{b}\cdots\cdots}}$ অসীম পর্যন্ত

$\therefore\ x^2=a\sqrt[3]{b}\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত [বর্গ করিয়া]

$\therefore\ x^6=a^3b\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\cdots\cdots$ অসীম পর্যন্ত $=a^3bx$ [$\because$ করণী অংশ $=x$]

$\therefore\ \frac{x^6}{x}=a^3b,$ বা, $x^5=a^3b,\quad \therefore\ x=\sqrt[5]{a^3b},$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\sqrt[5]{a^3b}.$

উদা. 10. Simplify $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$. [B. U.]

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{(x+\sqrt{x^2-1})^2-(x-\sqrt{x^2-1})^2}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}=\dfrac{4x\sqrt{x^2-1}}{x^2-(\sqrt{x^2-1})^2}$

$$=\frac{4x\sqrt{x^2-1}}{x^2-(x^2-1)}=\frac{4x\sqrt{x^2-1}}{x^2-x^2+1}=4x\sqrt{x^2-1}.$$

উদা. 11. If $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, find the value of $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$. [B. U.]

প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=\dfrac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$

$$=\frac{1+x+1-x-2\sqrt{1-x^2}}{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}=\frac{2-2\sqrt{1-x^2}}{1+x-(1-x)}=\frac{2(1-\sqrt{1-x^2})}{2x}$$

$$=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{1-\sqrt{1-\frac{3}{4}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1-\sqrt{\frac{1}{4}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

উদা. 12. If $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ and $y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$,

find the value of $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$.

এখানে $x+y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}=\dfrac{8}{2}=4$

এবং $xy=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\times\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=1.$

$$\therefore\ \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{(x+y)^2-xy}{(x+y)^2-3xy}=\frac{4^2-1}{4^2-3}=\frac{15}{13}.$$

উদা 13. If $x=\frac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}$,

prove that $bx^2-ax+b=0$ [D. B. '44]

প্রদত্ত সর্ত হইতে com & div. দ্বারা পাই

$\frac{x+1}{x-1}=\frac{2\sqrt{a+2b}}{2\sqrt{a-2b}}$, $\therefore \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}=\frac{a+2b}{a-2b}$ [বর্গ করিয়া]

বা, $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}=\frac{a+2b}{a-2b}$,

$\frac{2(x^2+1)}{4x}=\frac{2a}{4b}$ [com. & div দ্বারা]

বা, $\frac{x^2+1}{x}=\frac{a}{b}$, বা, $bx^2+b=ax$, $\therefore$ $bx^2-ax+b=0$

উদা. 14. Prove that $\sqrt{y+\sqrt{2xy-x^2}}+\sqrt{y-\sqrt{2xy-x^2}}$
$=\sqrt{2x}$. [C. U. '27]

$\because$ $(\sqrt{y+\sqrt{2xy-x^2}}+\sqrt{y-\sqrt{2xy-x^2}})^2$

$=y+\sqrt{2xy-x^2}+y-\sqrt{2xy-x^2}+2\sqrt{y^2-(\sqrt{2xy-x^2})^2}$

$=2y+2\sqrt{y^2-2xy+x^2}=2y+2\sqrt{(x-y)^2}=2y+2(x-y)$

$=2y+2x-2y=2x$,

$\therefore$ $\sqrt{y+\sqrt{2xy-x^2}}+\sqrt{y-\sqrt{2xy-x^2}}=\sqrt{2x}$.

Exercise 7

1. Express $\sqrt[3]{3}$ and $\sqrt[4]{5}$ as surds of the same order.

2. Express 2, $1\frac{1}{2}$ and x^2 as surds of (i) the second (ii) the third order.

3. Which is greater $\sqrt[3]{5}$ or $\sqrt[4]{8}$?

4. Arrange the following in order of magnitude :—
(i) $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{12}$ (ii) 3, $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{10}$ (iii) $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt[6]{25}$, $\sqrt[3]{8}$.

5. Express the following as complete surds :—
$2\sqrt{5}$, $3\sqrt[3]{2}$, $x\sqrt[4]{y}$.

6. Reduce to the simplest form :—
(i) $\sqrt{175}$ (ii) $2\sqrt{112}$ (iii) $5\sqrt{192}$ (iv) $\sqrt[3]{375}$
(v) $4\sqrt[3]{24}-2\sqrt[3]{81}$.

7. Prove that $\sqrt{108}-\sqrt{75}=\sqrt{3}$.

8. Show that $\sqrt{98}+\sqrt{8}-2\sqrt{32}=\sqrt{2}$.

9. Find the product of the following :—
(i) $3\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ (ii) $2\sqrt{5}\times3\sqrt{4}$ (iii) $4\sqrt[3]{4}\times2\sqrt[3]{2}$.
(iv) $2\sqrt[3]{3}\times3\sqrt{6}$.

10. Divide :—
(i) $6\sqrt{5}$ by $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt[3]{4}$ by $2\sqrt[3]{2}$ (iii) $3\sqrt[4]{5}\div6\sqrt[4]{4}$.

11. If $\sqrt{2}=1{\cdot}414$, $\sqrt{3}=1{\cdot}732$ and $\sqrt{5}=2{\cdot}236$, find the value of the following correct to 2 places of decimals :—

(i) $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{15}{\sqrt{5}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (v) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

12. Multiply : (i) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ by $\sqrt{2}-\sqrt{3}$
(ii) $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ by $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (iii) $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ by $4\sqrt{2}+\sqrt{5}$
(iv) $3\sqrt{5}-2\sqrt{6}$ by $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ (v) $\sqrt{x}+\sqrt{y-x}$ by $\sqrt{x}-\sqrt{y-x}$
(vi) $\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}$ by $\sqrt{a-b}$
(vii) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$ by $\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{5}$ (viii) $x+\sqrt{y}$ by $\sqrt{x}-y$.

13. Find the square of :—
(i) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (ii) $2-\sqrt{3}$ (iii) $\sqrt{2}+2\sqrt{3}$
(iv) $\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$ (v) $a-\sqrt{b^2-a^2}$ (vi) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-5}$.

14. Rationalise the denominators :-
(a) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ (b) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}$ (c) $\frac{3\sqrt{2}+1}{2\sqrt{5}-1}$ (d) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$.

15. Divide $3+\sqrt{6}$ by $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

16. Find the value of $\frac{2\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$, when $\sqrt{5}=2\cdot236$.

Simplify :—

17. $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$

18. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$. [B. U.]

19. $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ [B. U. 1888]

20. $\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{(3+\sqrt{5})}}-\frac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{18}-\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$. [M. U. 1892]

21. $\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}-\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}+\sqrt{a+x}}$. [M. U.]

22. Evaluate $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\cdots$ to infinity.

23. If $a=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ and $b=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$,

find the value of $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$.

24. Find the value of $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$, when $x=4+2\sqrt{3}$.

25. If $x=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2}}$,

show that $b^2x^2-2a^2x+b^2=0$.

26. Prove that $\sqrt{a^2+2x\sqrt{a^2-x^2}}+\sqrt{a^2-2x\sqrt{a^2-x^2}}=2x$.
[উদা. 14 দেখ.]

27. Evaluate $a^6+a^4+a^2+1$, when $a=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$.

[Hints : $a^2 = \frac{1-1+2\sqrt{-1}}{2} = \sqrt{-1}$, $\therefore\ a^4 = -1$]

28. If $x = (a+\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}} + (a-\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}$, find the value of $x^3+3bx-2a$.

[Hints : $x^3 = a+\sqrt{a^2+b^3}+a-\sqrt{a^2+b^3}+3(a+\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}\times$
$(a-\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}\{(a+\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}+(a-\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}\}$
$=2a+3\{a^2-(\sqrt{a^2+b^3})^2\}^{\frac{1}{3}}x = 2a+3(a^2-a^2-b^3)^{\frac{1}{3}}.x$
$=2a+3(-b^3)^{\frac{1}{3}}\,x = 2a+3.(-1)^{\frac{1}{3}}.(b^3)^{\frac{1}{3}}x = 2a-3bx\cdots$]

29. If $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$, then $(x+y+z)^3 = 27xyz$.

30. If $x = a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$, prove that $a(bx^3-3bx-a)=b^2$.
[C. U. (D. M. H.) '51]

[Hints : $x^3 = ab^{-1}+a^{-1}b+3a^{\frac{1}{3}}.b^{-\frac{1}{3}}.a^{-\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)$

$$=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+3a^\circ b^\circ.x = \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+3x$$

$\therefore\ abx^3 = a^2+b^2+3abx$ (উভয় পক্ষকে ab দ্বারা গুণ করিয়া),

বা, $abx^3-3abx-a^2=b^2$, $\therefore\ a(bx^3-3bx-a)=b^2$.]

Evolution (মূলাকর্ষণ)

আমরা পূর্বে কোন রাশিকে কোন নির্দিষ্ট ঘাত বা শক্তিতে উন্নীত করিবার প্রক্রিয়া (involution) সম্বন্ধে আলোচনা করিয়াছি। এখানে আমরা উহার বিপরীত প্রক্রিয়া মূলাকর্ষণ সম্বন্ধে আলোচনা করিতেছি।

39. মূল : একটি প্রদত্ত রাশির কোন মূল বলিলে এমন একটি রাশিকে বুঝায় যাহাকে ঐ সূচক-নির্দিষ্ট ঘাতে উন্নীত করিলে ঐ প্রদত্ত রাশিটি

পাওয়া যায়। যথা, $\sqrt[3]{8}=2$ (এখানে দেখ 2কে ত্রিঘাতে উন্নীত করিলে 8 হয়, ∴ 8এর ঘনমূল 2)। আবার, $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b$ এখানে দেখ, $a+b$কে দ্বিঘাতে উন্নীত করিলে $a^2+2ab+b^2$ হয়, $a^2+2ab+b^2$ এর বর্গমূল $a+b$ হইল।

মূল সূচক চিহ্নকে ($\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, ইত্যাদি) radical sign বলে।

40 মূলাকর্ষণ : কোন রাশির নির্দিষ্ট মূল নির্ণয় করিবার প্রক্রিয়াকে **মূলাকর্ষণ প্রক্রিয়া** বলে। যথা, কোন সংখ্যা বা রাশির বর্গমূল, ঘনমূল বা n-তম মূল প্রভৃতি নির্ণয়। যথা—

উদা. 1. $\sqrt{a^4}=\pm a^2$ [কারণ $(\pm a^2)^2=a^4$],

$$\sqrt{a^5}=\pm a^{\frac{5}{2}} \text{ [কারণ } \left(\pm a^{\frac{5}{2}}\right)^2=a^5 \text{]}$$

$$\sqrt{16a^6}=\pm 4a^3.$$

দ্রষ্টব্য : উপরের দৃষ্টান্ত হইতে দেখা যাইতেছে যে (i) কোন ধনাত্মক রাশির বর্গমূল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দুইটি হইবে। কারণ $(a^2)^2=a^4$ এবং $(-a^2)^2=a^4$, সুতরাং a^4 এর বর্গমূল $+a^2$ এবং $-a^2$ দুইই হইবে। সাধারণতঃ ধনাত্মক মূলটি লেখা হয়। তোমরা দুইটিই লিখিবে।

আবার দেখ, কোন পদের বর্গমূলের ঘাত সেই পদের যে ঘাত আছে তাহার অর্ধেক হইবে। যথা, a^5 এর বর্গমূল $a^{\frac{5}{2}}$.

(ii) পদের সাংখ্য-সহগের বর্গমূল পাটীগণিতের প্রণালীতে নির্ণয় করিয়া লইবে।

উদা. 2 $\sqrt[3]{x^6}=x^2$ [কারণ $(x^2)^3=x^6$]

$$\sqrt[3]{-x^6}=-x^2 \text{ [কারণ } (-x^2)^3=-x^6 \text{]}$$

$$\sqrt[3]{27x^3y^6}=3xy^2.$$

দ্রষ্টব্য : উপরের দৃষ্টান্ত হইতে দেখা গেল যে,

(i) কোন পদের ঘনমূলের ঘাত পদটির ঘাতের এক-তৃতীয়াংশ ($\frac{1}{3}$) হয়। যথা, x^6 এর ঘনমূল x^2, x^5 এর ঘনমূল $x^{\frac{5}{3}}$, ইত্যাদি।

(ii) ধনাত্মক পদের ঘনমূল কেবল ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক পদের ঘনমূল কেবল ঋণাত্মক হয়।

নিয়ম: বীজগণিতায় কোন ঘাতবিশিষ্ট পদের যে মূল নির্ণয় করিতে হইবে, সেই মূলের ঘাত হইবে প্রদত্ত ঘাতের তত অংশ।

$$\sqrt[4]{b^{20}}=\pm a^{\frac{20}{4}}=\pm a^5\ ;\ \sqrt[5]{-x^{15}}=-x^{\frac{15}{5}}=-x^3.$$

অতএব, ক্রিয়াসূচক চিহ্নের নিয়ম (Rule of signs) অনুসারে জানা যায় যে,

(i) কোন ধনাত্মক রাশির কোন **যুগ্ম মূল** ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দুইটি হইবে।

(ii) কোন রাশির কোন **অযুগ্ম মূল** একটি হয়, ধনাত্মক বাশির অযুগ্ম মূল ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক রাশির অযুগ্ম মূল ঋণাত্মক হইয়া থাকে।

(iii) কোন ঋণাত্মক রাশির কখনই কোন যুগ্ম মূল থাকিতে পারে না।

Square root (বর্গমূল)

41. **বর্গমূল:** কোন সংখ্যাকে সেই সংখ্যা দ্বারা গুণ করিয়া যে গুণফল পাওয়া যায়, তাহাকে ঐ সংখ্যাটির **বর্গ** (square) বলে। আর ঐ সংখ্যাটিকে **গুণফলটির বর্গমূল** (square root) বলে। যথা, $3\times3=9$, এখানে 9কে 3এর বর্গ বলে, এবং 3কে 9এর বর্গমূল বলে। এইরূপে a^2এর বর্গমূল a, x^6এর বর্গমূল x^3. অতএব, কোন রাশির বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে এমন একটি রাশি বাহির করিতে হইবে যাহাকে ঐ রাশির দ্বারাই গুণ করিয়া গুণফলটি প্রদত্ত রাশির সমান হয়।

দ্রষ্টব্য: বর্গমূল নির্ণয়ের সময় ঘাতের অর্ধেক বর্গমূলের ঘাত হয়। যথা, x^4এর বর্গমূল x^2, x^7এর বর্গমূল $x^{\frac{7}{2}}$, x^{-5}এর বর্গমূল $x^{-\frac{5}{2}}$ ইত্যাদি।

42. বর্গমূল নির্ণয়ের সাধারণ প্রণালী

নিয়ম: এই নিয়ম পাটীগণিতের সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয়ের অনুরূপ। প্রদত্ত রাশিমালাটি কোন অক্ষরের (a, x প্রভৃতি) ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে বা

অধঃক্রমে সাজান না থাকে, তবে প্রথমে ঐরূপে সাজাইয়া লও। তারপর সাজান রাশিটির প্রথম পদের বর্গমূল স্থির করিয়া তাহাকে ভাগফলের মত রাশিটির ডানদিকে লিখ। উহাই হইল নির্ণেয় বর্গমূলের প্রথম পদ। ঐ প্রথম পদের বর্গকে রাশিমালার প্রথম পদের নীচে রাখিয়া রাশিমালা হইতে বিয়োগ কর। ঐ বর্গমূলের প্রথম পদটির দ্বিগুণকে বিয়োগফলের বামদিকে ভাজকের মত করিয়া বসাও। তারপর ঐ বিয়োগফলের প্রথম পদকে ঐ ভাজকের প্রথম পদ দ্বারা ভাগ করিয়া যাহা হয় (মুখে মুখে স্থির করিয়া) তাহা বর্গমূলের দ্বিতীয় পদরূপে বসাও এবং বামদিকেও ভাজকের সঙ্গে বসাও (যোগ কর)। তারপর বামদিকের রাশিকে (ভাজককে) ঐ দ্বিতীয় পদ দ্বারা গুণ করিয়া পূর্বের বিয়োগফলটি হইতে বিয়োগ কর। এইবার বর্গমূলের পদ দুইটির দ্বিগুণ করিয়া পূর্বের ন্যায় কাজ করিয়া যাও। যতক্ষণ কোন অবশিষ্ট থাকিবে ততক্ষণ এইরূপ প্রক্রিয়া চলিবে। ± চিহ্নের পর বন্ধনীর মধ্যে প্রাপ্ত বর্গমূলটি লিখিবে।

উদাহরণমালা 10

উদা. 1. Find the square root of $x^4+4x^3+10x^2+12x+9$. [C. U. '22]

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & x^4+4x^3+10x^2+12x+9 & x^2+2x+3 \\
 & x^4 & \\
\hline
2x^2+2x & 4x^3+10x^2+12x+9 & \\
 & 4x^3+\ 4x^2 & \\
\hline
2x^2+4x+3 & 6x^2+12x+9 & \\
 & 6x^2+12x+9 & \\
\hline
\end{array}
$$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(x^2+2x+3)$.

উদা. 2. Extract the square root of $25x^{-2}-12x+16x^{-8}+4x^4-24x^{-5}$. [C. U. '12]

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & 4x^4-12x+25x^{-2}-24x^{-5}+16x^{-8} & 2x^2-3x^{-1}+4x^{-4} \\
 & 4x^4 & \\
\hline
4x^2-3x^{-1} & -12x+25x^{-2}-24x^{-5}+16x^{-8} & \\
 & -12x+\ 9x^{-2} & \\
\hline
4x^2-6x^{-1}+4x^{-4} & 16x^{-2}-24x^{-5}+16x^{-8} & \\
 & 16x^{-2}-24x^{-5}+16x^{-8} & \\
\hline
\end{array}
$$

নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(2x^2-3x^{-1}+4x^{-4})$.

[দ্রষ্টব্য ঃ এখানে প্রথমে x-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে রাশিটিকে সাজান হইল। x অপেক্ষা x^{-2}এর ঘাত কম, কারণ xএ ঘাত সূচক 1 এবং x^{-2}এ ঘাত সূচক -2, ইহা 1 অপেক্ষা কম। আবার বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ $-3x^{-1}$ কিরূপে নির্ণয় করা হইল দেখ। এখানে $-12x$কে ভাজকের $4x^2$ দ্বারা ভাগ করিয়া বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ পাওয়া যাইবে। -12কে 4 দিয়া ভাগ করিলে হয় -3 এবং ভাগে ঘাতগুলির বিয়োগফল লইতে হয় বলিয়া $x \div x^2$ করিয়া হইল $x^{1-2}=x^{-1}$. এইরূপে শেষবারে $16x^{-2} \div 4x^2$ করিয়া হইল $4x^{-2-2}=4x^{-4}$.]

উদা. 3. Find the square root of $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-6\frac{x}{y}+6\frac{y}{x}+7.$

[C. U. '11]

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & \frac{x^2}{y^2}-\frac{6x}{y}+7+\frac{6y}{x}+\frac{y^2}{x^2} & \frac{x}{y}-3-\frac{y}{x} \\
 & \frac{x^2}{y^2} & \\
\hline
\frac{2x}{y}-3 & -\frac{6x}{y}+7+\frac{6y}{x}+\frac{y^2}{x^2} & \\
 & -\frac{6x}{y}+9 & \\
\hline
\frac{2x}{y}-6-\frac{y}{x} & -2+\frac{6y}{x}+\frac{y^2}{x^2} & \\
 & -2+\frac{6y}{x}+\frac{y^2}{x^2} & \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(\frac{x}{y}-3-\frac{y}{x}\right)$.

[দ্রষ্টব্য ঃ $6\frac{x}{y}=\frac{6x}{y}$ ধরিতে হইবে। xএর ঘাতের অধঃক্রমে কিরূপে সাজান হইল দেখ। প্রথমে আছে x^2, দ্বিতীয় পদে x ; তৃতীয় পদ রাখা হইল 7, কারণ এখানে x নাই অর্থাৎ xএর ঘাত 0 $(7=7.x^0)$। তারপর চতুর্থ পদ হইল $\frac{y}{x}$; কারণ, $\frac{y}{x}=yx^{-1}$; এইরূপে $\frac{y^2}{x^2}=y^2.x^{-2}$. অতএব পরপর xএর ঘাতের সূচকগুলি হইবে 2, 1, 0, -1, -2.]

উদা. 4. Extract the square root of

$$9x^{\frac{3}{2}}+6+4x-12x^{\frac{5}{4}}+x^{-\frac{3}{2}}-4x^{-\frac{1}{4}}.$$

$$\begin{array}{l|l} 9x^{\frac{3}{2}}-12x^{\frac{5}{4}}+4x+6-4x^{-\frac{1}{4}}+x^{-\frac{3}{2}} & 3x^{\frac{3}{4}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{4}} \\ 9x^{\frac{3}{2}} & \\ \hline 3x^{\frac{3}{4}}-2x^{\frac{1}{2}} \mid -12x^{\frac{5}{4}}+4x+6-4x^{-\frac{1}{4}}+x^{-\frac{3}{2}} & \\ \quad -12x^{\frac{5}{4}}+4x & \\ \hline 6x^{\frac{3}{4}}-4x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{4}} \mid 6-4x^{-\frac{1}{4}}+x^{-\frac{3}{2}} & \\ \quad 6-4x^{-\frac{1}{4}}+x^{-\frac{3}{2}} & \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(3x^{\frac{3}{4}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{4}}\right)$

[দ্রষ্টব্য : এখানে সাজান সহজ। $x^{\frac{3}{2}}$এর বর্গমূল $x^{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{4}}$. শেষ ধাপে 6কে $6x^{\frac{3}{4}}$ দিয়া ভাগ করিলে হইল $\frac{6}{6x^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}=x^{-\frac{3}{4}}$.]

উদা. 5. Find the square root of $x^4-2x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$.. [C. U. '51]

$$\begin{array}{l|l} x^4-2x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16} & x^2-x+\frac{1}{4} \\ x^4 & \\ \hline 2x^2-x \;)\; -2x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16} & \\ \quad -2x^3+x^2 & \\ \hline 2x^2-2x+\frac{1}{4} \;)\; \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16} & \\ \quad \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16} & \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(x^2-x+\frac{1}{4})$.

উদা. 6 Find the square root of

$$4x^4+20x^2-3-\frac{70}{x^2}+\frac{49}{x^4}.$$ [C. U. '10, '43]

$$4x^4+20x^2-3-\frac{70}{x^2}+\frac{49}{x^4}\left(\,2x^2+5-\frac{7}{x^2}\right.$$
$$4x^4$$
$$4x^2+5\,\Big)\;20x^2-3-\frac{70}{x^2}+\frac{49}{x^4}$$
$$20x^2+25$$
$$4x^2+10-\frac{7}{x^2}\,\Big)-28-\frac{70}{x^2}+\frac{49}{x^4}$$
$$-28-\frac{70}{x^2}+\frac{49}{x^4}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(2x^2+5-\frac{7}{x^2}\right)$

উদা. 7. Extract the sq. root of $9a-12a^{\frac{1}{2}}-2+4a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}$.
[Pat. U. '30]

$$9a-12a^{\frac{1}{2}}-2+4a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}\left(\,3a^{\frac{1}{2}}-2-a^{-\frac{1}{2}}\right.$$
$$9a$$
$$6a^{\frac{1}{2}}-2\,\Big)-12a^{\frac{1}{2}}-2+4a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}$$
$$-12a^{\frac{1}{2}}+4$$
$$6a^{\frac{1}{2}}-4-a^{-\frac{1}{2}}\,\Big)-6+4a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}$$
$$-6+4a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(3a^{\frac{1}{2}}-2-a^{-\frac{1}{2}}\right)$

[**দ্রষ্টব্য :** a-এর বর্গমূল $=a^{\frac{1}{2}}$; তৃতীয় ধাপের সময় $-6\div 6a^{\frac{1}{2}}$ করিয়া পাই $\frac{-6}{6a^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}=-a^{-\frac{1}{2}}$, অর্থাৎ ভাজ্য -6 এ a^0 আছে, ভাজকে $a^{\frac{1}{2}}$কে $a^{-\frac{1}{2}}$ দ্বারা গুণ করিলে a^0 হয়, $\therefore$ বর্গমূলের তৃতীয় পদে $-a^{-\frac{1}{2}}$ হইল।]

উদা. 8. Find the sq. root of $\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+6\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)+7$.
[C. U. '47]

প্রদত্ত রাশি $= x^4 + \frac{1}{x^4} + 6\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + 7 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 6x^2 - \frac{6}{x^2} + 7.$

$$x^4 + 6x^2 + 7 - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^4}\left(x^2 + 3 - \frac{1}{x^2}\right.$$

$$x^4$$

$$2x^2+3\Big)\ 6x^2 + 7 - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^4}$$

$$6x^2 + 9$$

$$2x^2 + 6 - \frac{1}{x^2}\Big)\ -2 - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^4}$$

$$-2 - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^4}$$

∴ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm\left(x^2 + 3 - \frac{1}{x^2}\right)$

[দ্রষ্টব্য : এখানে বন্ধনী তুলিয়া দিয়া সাধারণ নিয়মে করা হইল। এইরূপ রাশিকে পূর্ণবর্গরূপে প্রকাশ করিয়া বর্গমূল নির্ণয় করা যায়। পরে উদা 10এ এইরূপ প্রশ্নের সমাধান দেখ।]

উদা 9 Find the first three terms of the square root of $a^2 + b^2$.

$$a^2 + b^2\left(a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3}\right.$$

$$a^2$$

$$2a + \frac{b^2}{2a}\Big)\ b^2$$

$$b^2 + \frac{b^4}{4a^2}$$

$$2a + \frac{b^2}{a} - \frac{b^4}{8a^3}\Big)\ -\frac{b^4}{4a^2}$$

$$-\frac{b^4}{4a^2} - \frac{b^6}{8a^4} + \frac{b^8}{64a^6}$$

$$\frac{b^6}{8a^4} - \frac{b^8}{64a^6}$$

বর্গমূলের নির্ণেয় প্রথম তিনটি পদ $= a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3}.$

43. পূর্ণবর্গরূপে প্রকাশ করিয়া বর্গমূল নির্ণয়

উদা. 10. Find the sq. root of $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

[C. U. '14 ; D. B. '38 ; E. B S. B '50 ; G. U. '48 ; P. U. '27]

প্রদত্ত রাশি $=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4x\cdot\frac{1}{x}-4\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$[\because\ (a+b)^2=(a-b)^2+4ab]$

$=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4-2.2\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2.2\left(x-\frac{1}{x}\right)+(2)^2=\left(x-\frac{1}{x}-2\right)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(x-2-\frac{1}{x}\right)$.

অথবা, প্রদত্ত রাশি $=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\ x.\frac{1}{x}-4\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=a^2-4a+4\left[x-\frac{1}{x}=a\right.$ ধরিয়া$\left.\right]=(a-2)^2=\left(x-\frac{1}{x}-2\right)^2$.

[ধরিবার সঙ্কেত ঃ পূর্ণবর্গ করিয়া সাজাইতে হইলে দুইটি পদের পূর্ণবর্গ এবং উহাদের গুণফলের দ্বিগুণ এই তিনটি পদ দেখাইতে হইবে অর্থাৎ $a^2\pm2ab+b^2$ এই আকারে সাজাইতে হয়। প্রদত্ত অঙ্কে $-4\left(x-\frac{1}{x}\right)$ পূর্ণবর্গ নহে বলিয়া উহাই দুই পদের গুণফলের দ্বিগুণ ; $\therefore$ একটি পদ $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ হইবে। এইজন্য অঙ্কের $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4.x.\frac{1}{x}$ ধরা হইল।

উদা. 11. Extract the sq. root of $4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-12\left(x-\frac{1}{x}\right)+1$.

[B. U.]

প্রদত্ত রাশি $=4\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2x.\frac{1}{x}\right\}-12\left(x-\frac{1}{x}\right)+1$

$=4(a^2+2)-12a+1$ $\left[\, x-\frac{1}{x}=a \text{ ধরিয়া} \,\right]$

$=4a^2-12a+9=(2a-3)^2=\left(2x-\frac{2}{x}-3\right)^2$ [aর মান লিখিয়া]

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(2x-3-\frac{2}{x}\right)$

উদা. 12. Find the sq. root of $x^4+\frac{1}{x^4}+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3.$

[C. U. '40]

প্রদত্ত রাশি $=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2x^2.\frac{1}{x^2}+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3$

$$=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+1=\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right)^2$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right).$

উদা. 13. Find the sq. root of $\left(a+\frac{1}{2a}\right)^2-14\left(a-\frac{1}{2a}\right)+47.$

[C. U. '19 ; W. B. S. F. '58.]

প্রদত্ত রাশি $=\left(a-\frac{1}{2a}\right)^2+4\ a.\frac{1}{2a}-14\left(a-\frac{1}{2a}\right)+47$

$$=\left(a-\frac{1}{2a}\right)^2+2-14\left(a-\frac{1}{2a}\right)+47$$

$$=\left(a-\frac{1}{2a}\right)^2-2.7.\left(a-\frac{1}{2a}\right)+49=\left(a-\frac{1}{2a}-7\right)^2$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(a-7-\frac{1}{2a}\right).$

উদা. 14. Extract the sq. root of

$$\frac{(a^2+b^2)^2}{a^4+b^4-2a^2b^2}+4.\frac{a}{a+b}\times\frac{b}{a-b}.$$ [C. U. ; B. U.]

প্রদত্ত রাশি $=\frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2-b^2)^2}+\frac{4ab}{a^2-b^2}=\frac{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}+\frac{4ab}{a^2-b^2}$

$=\frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2-b^2)^2}+\frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}+\frac{4ab}{a^2-b^2}$

$=1+\left(\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)^2+2.1.\frac{2ab}{a^2-b^2}=\left(1+\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(1+\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$.

উদা. 15. Find the sq. root of $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2\frac{1}{2}-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\sqrt{2}$.

প্রদত্ত রাশি $=\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2\right)+\frac{1}{2}-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\sqrt{2}$

$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-2.\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{y}{x}\right)$.

[দ্রষ্টব্য : $2\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}$, ইহার 2কে $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}$এর সঙ্গে লইয়া হইল $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2$, $\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ এবং $\sqrt{2}=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}$ লেখা যায়।]

উদা. 16. Show that $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+16$ is a perfect square. [C. U. '30, '36, '41]

প্রদত্ত রাশি $=\{(x-1)(x-7)\}\{(x-3)(x-5)\}+16$

$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+16=(a+7)(a+15)+16$

[$x^2-8x=a$ ধরিয়া]

$=a^2+22a+105+16=a^2+22a+121=(a+11)^2$

$=(x^2-8x+11)^2$, ইহা একটি পূর্ণবর্গ।

উদা. 17. Find the sq. root of $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$.

[G. U. '51 ; C. U. '24]

প্রদত্ত রাশি $= x(x+3)(x+1)(x+2)+1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$
$= a(a+2)+1$ [$x^2+3x=a$ ধরিয়া] $= a^2+2a+1 = (a+1)^2$
$= (x^2+3x+1)^2$. $\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm(x^2+3x+1)$.

উদা. 18. Express $(x-2a)(x-5a)(x-8a)(x-11a)+81a^4$ as a perfect square. [C. U. '45]

প্রদত্ত রাশি $= (x-2a)(x-11a)(x-5a)(x-8a)+81a^4$
$= (x^2-13ax+22a^2)(x^2-13ax+40a^2)+81a^4$
$= (k+22a^2)(k+40a^2)+81a^4$ [$x^2-13ax=k$ ধরিয়া]
$= k^2+62ka^2+880a^4+81a^4 = k^2+62ka^2+961a^4$
$= (k+31a^2)^2 = (x^2-13ax+31a^2)^2$, ইহা একটি পূর্ণবর্গ।

উদা. 19. Find the sq. root of $(ab+ac+bc)^2-4abc(a+c)$.

মনে কর, $ab+bc=x$, এবং $ac=y$, সুতরাং $x=b(a+c)$.
এবং $xy=abc(a+c)$.

এক্ষণে প্রদত্ত রাশি $= (x+y)^2-4xy = (x-y)^2 = (ab+bc-ac)^2$.
$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm(ab+bc-ac)$.

উদা. 20. Find the sq. root of $(a-b)^4-2(a^2+b^2)(a-b)^2+2(a^4+b^4)$. [C. U. '11]

প্রদত্ত রাশি $= \{(a-b)^2\}^2-2(a-b)^2(a^2+b^2)+(a^2+b^2)^2+a^4+b^4-2a^2b^2$

[$\because$ $2(a^4+b^4) = (a^4+b^4)+a^4+b^4$
$= (a^2+b^2)^2-2a^2b^2+a^4+b^4$]

$= \{(a-b)^2-(a^2+b^2)\}^2+a^4+b^4-2a^2b^2$
$= \{a^2+b^2-2ab-a^2-b^2\}^2+a^4+b^4-2a^2b^2$
$= (-2ab)^2+a^4+b^4-2a^2b^2 = 4a^2b^2+a^4+b^4-2a^2b^2$
$= a^4+b^4+2a^2b^2 = (a^2+b^2)^2$.
$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm(a^2+b^2)$.

উদা. 21. Extract the sq. root of $(1-6a^2+a^4)^2$
$+16a^2(1-a^2)^2$. [C. U. '20]

প্রদত্ত রাশি $=\{(1-2a^2+a^4)-4a^2\}^2+16a^2(1-a^2)^2$

$=\{(1-a^2)^2-4a^2\}^2+16a^2(1-a^2)^2$

$=\{(1-a^2)^2\}^2+16a^4-8a^2(1-a^2)^2+16a^2(1-a^2)^2$

$=\{(1-a^2)^2\}^2+16a^4+8a^2(1-a^2)^2$

$=\{(1-a^2)^2\}^2+(4a^2)^2+2\cdot4a^2(1-a^2)$

$=\{(1-a^2)^2+4a^2\}^2$

$=(1+a^4-2a^2+4a^2)^2=(1+2a^2+a^4)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(1+2a^2+a^4)$.

44. করণীর বর্গমূল নির্ণয়

নিয়ম 1. কোন মূলদ রাশির বর্গমূল একটি মূলদ রাশি ও একটি দ্বিঘাত করণীর সমষ্টি বা অন্তরফলের সমান হইতে পারে না।

প্রমাণ ঃ যদি সম্ভব হয় মনে কর $\sqrt{x}=a\pm\sqrt{y}$.

এক্ষণে উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া পাই $x=a^2+y\pm2a\sqrt{y}$

বা, $\pm2a\sqrt{y}=x-a^2-y$, $\therefore \pm\sqrt{y}=\dfrac{x-a^2-y}{2a}$, সুতরাং একটি অমূলদ রাশি ($\sqrt{y}$) একটি মূলদ রাশির সমান হইতেছে, কিন্তু তাহা অসম্ভব।

নিয়ম 2. যদি $x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}$ হয় এবং উহাতে x ও a দুইটিই মূলদ এবং $\sqrt{y}$ ও $\sqrt{b}$ দুইটিই প্রকৃত অমূলদ রাশি হয়, তবে $x=a$ এবং $y=b$ হইবে।

প্রমাণ ঃ যদি x ও a সমান না হয়, তবে মনে কর, $x=a+m$; অতএব প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই

$$a+m+\sqrt{y}=a+\sqrt{b},$$

$\therefore \sqrt{b}=m+\sqrt{y}$, কিন্তু ইহা অসম্ভব।

অতএব x ও a অসমান নহে ; $\therefore x=a$.

অতএব $\sqrt{y}=\sqrt{b}$, $\therefore y=b$.

[**দ্রষ্টব্য :** (i) পূর্বপৃষ্ঠার নিয়মটিতে যদি $\sqrt{y}$ ও $\sqrt{b}$ **প্রকৃত** অমূলদ না হয়, তবে ঐ নিয়ম সিদ্ধ হইবে না। যথা, $3+\sqrt{16}=4+\sqrt{9}$ এই সমীকরণের উভয় পক্ষই সমান (=7), কিন্তু ইহা হইতে উপরের নিয়মে বলা যায় না যে $3=4$ এবং $16=9$. অতএব, দেখা যাইতেছে যে এই উদাহরণটিতে $\sqrt{16}$ ও $\sqrt{9}$ প্রকৃত অমূলদ সংখ্যা না হওয়ায় ঐ নিয়ম সিদ্ধ হইল না।

(ii) (উপরের নিয়মে) যদি $x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}$ হয়, তবে $x-\sqrt{y}=a-\sqrt{b}$ হইবে। অতএব $x\pm\sqrt{y}=m\pm\sqrt{n}$ এই আকারের সমীকরণের উভয় পক্ষের মূলদ রাশিদ্বয় সমান এবং উভয়পক্ষের অমূলদ রাশিদ্বয়ও সমান ধরা যাইবে।

(1) **পর্যবেক্ষণের** সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় প্রণালী : দুই পদযুক্ত দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল নির্ণয়ের জন্য প্রথমে করণীকে $a+2\sqrt{b}$ এই আকারে পরিণত করিবে, তারপর দেখিয়া এরূপ দুইটি রাশি নির্ণয় করিবে যেন তাহাদের সমষ্টি aএর সমান এবং গুণফল bএর সমান হয়।

উদা. 22. Find the square root of $7+2\sqrt{12}$.

এখানে এমন দুইটি সংখ্যা স্থির কর যাহাদের যোগফল = 7 এবং গুণফল 12. 4 এবং 3 সেই সংখ্যাদ্বয়।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=4+3+2\sqrt{4.3}=(2)^2+(\sqrt{3})^2+2.2\sqrt{3}$

$=(2+\sqrt{3})^2$. $\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(2+\sqrt{3})$.

[**দ্রষ্টব্য :** প্রত্যেক রাশির দুইটি করিয়া বর্গমূল হয়। যথা, 4এর বর্গমূল ±2, a^2+b^2+2abএর বর্গমূল $\pm(a+b)$. অতএব, উপরের উদাহরণে $-2-\sqrt{3}$ আর একটি বর্গমূল হয়। অতএব, এরূপ স্থলেও $\pm(2+\sqrt{3})$ এরূপে উত্তর লিখিবে।]

উদা. 23. Extract the sq. root of $28-10\sqrt{3}$.

প্রদত্ত রাশি $=28-2.5\sqrt{3}$

$=25+3-2.5\sqrt{3}=(5)^2+(\sqrt{3})^2-2.5.\sqrt{3}=(5-\sqrt{3})^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(5-\sqrt{3})$.

উদা. 24. Find the sq. root of $8+2\sqrt{15}$.

প্রদত্ত রাশি $=5+3+2\sqrt{5.3}=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{3})^2+2\sqrt{5}.\sqrt{3}$

$=(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

উদা. 25. Find the sq. root of $2-\sqrt{3}$.

$2-\sqrt{3}=2-2.\frac{1}{2}.\sqrt{3}=2-2\sqrt{\frac{1}{4}}.\sqrt{3}=2-2\sqrt{\frac{3}{4}}$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-2\sqrt{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}}=(\sqrt{\frac{3}{2}})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-2.\sqrt{\frac{3}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}$

$=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$. $\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}})$.

(2) যদি কোন সমীকরণে উভয় পক্ষেই মূলদ রাশি ও দ্বিঘাতকরণী থাকে, তবে উভয় পক্ষের মূলদ রাশিগুলি সমান এবং উভয় পক্ষের অমূলদ রাশিগুলি সমান হয়। এই নিয়মের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় করা যায়।

উদা. 26. Find the sq. root of $8-2\sqrt{15}$.

মনে কর, $\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$,

বর্গ করিয়া পাই, $8-2\sqrt{15}=x+y-2\sqrt{xy}$

$\therefore$ মূলদ রাশিদ্বয় $x+y=8$ এবং অমূলদ রাশিদ্বয় $-2\sqrt{xy}=-2\sqrt{15}$.

$\therefore$ $(x+y)^2=64$ এবং $4xy=4.15=60$ [বর্গ করিয়া]

$\therefore$ $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=64-60=4$, $\therefore$ $x-y=\pm2$.

এক্ষণে, $x+y=8$
$x-y=\pm2$

$\therefore$ $x=5$ এবং $y=3$, অথবা $x=3$, $y=5$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{5}-\sqrt{3})$.

উদা. 27. Find the sq. root of $a+b+\sqrt{2ab+b^2}$. [B. U.]

মনে কর, $\sqrt{(a+b+\sqrt{2ab+b^2})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$;

বর্গ করিয়া পাই, $a+b+\sqrt{2ab+b^2}=x+y+2\sqrt{xy}$

$\therefore \quad x+y=a+b \cdots(1)$ এবং $2\sqrt{xy}=\sqrt{2ab+b^2}$

$\therefore \quad (x+y)^2=(a+b)^2$ এবং $4xy=2ab+b^2$.

এক্ষণে $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(a+b)^2-2ab-b^2=a^2$,

$\therefore \quad x-y=\pm a \cdots(2)$. এক্ষণে, (1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই

$$x=a+\frac{b}{2}=\frac{2a+b}{2},\ y=\frac{b}{2},\ \text{অথবা}\ x=\frac{b}{2},\ y=\frac{2a+b}{2}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(\sqrt{\frac{2a+b}{2}}+\sqrt{\frac{b}{2}}\right)$

উদা. 28. Find the square root of $\sqrt{32}-\sqrt{24}$.

$$\sqrt{32}-\sqrt{24}=\sqrt{8}(\sqrt{4}-\sqrt{3})=\sqrt{8}(2-\sqrt{3})$$

$$=\sqrt{8}\times\frac{4-2\sqrt{3}}{2}\ [\ \sqrt{3}\text{র সহগ 2 করা হইল}\ ]$$

$$=2\sqrt{2}\times\frac{3+1-2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{2}(3+1-2\sqrt{3})$$

$$=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)^2$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\sqrt[4]{2}(\sqrt{3}-1)$.

45. বর্গমূল সম্বন্ধীয় বিবিধ সমাধান

উদা. 29. What must be added to $x^4-6x^3+13x^2-12x+1$ to make it a perfect square ? [C. U. '15]

$$\begin{array}{l|l} & x^4-6x^3+13x^2-12x+1 \quad x^2-3x+2 \\ & x^4 \\ \hline 2x^2-3x & -6x^3+13x^2-12x+1 \\ & -6x^3+9x^2 \\ \hline 2x^2-6x+2 & 4x^2-12x+1 \\ & 4x^2-12x+4 \\ \hline & \qquad\qquad -3 \end{array}$$

রাশিমালা পূর্ণবর্গ হইলে অবশিষ্ট কিছু থাকিবে না, অর্থাৎ অবশিষ্ট শূন্য হইবে। এখানে অবশিষ্ট আছে -3, ইহার সহিত $+3$ যোগ করিলে অবশিষ্ট শূন্য হইবে। সুতরাং রাশিটিতে 3 যোগ করিলে উহা পূর্ণবর্গ হইবে।

উদা. 30 What must be subtracted from $4x^4-12x^3-7x^2+25x+14$ to make it a perfect square ?

$$
\begin{array}{l|l}
 & 4x^4-12x^3-7x^2+25x+14 \quad \big|\; 2x^2-3x-4 \\
 & 4x^4 \\ \hline
4x^2-3x & -12x^3-7x^2+25x+14 \\
 & -12x^3+9x^2 \\ \hline
4x^2-6x-4 & -16x^2+25x+14 \\
 & -16x^2+24x+16 \\ \hline
 & x-2
\end{array}
$$

রাশিটি পূর্ণবর্গ হইলে অবশিষ্ট শূন্য হইবে। এক্ষেত্রে অবশিষ্ট আছে $x-2$.
$\therefore$ রাশিটি হইতে $x-2$ বিয়োগ করিতে হইবে।

[দ্রষ্টব্য : (1) কি যোগ করিলে পূর্ণবর্গ হইবে, এরূপ প্রশ্নে অবশিষ্ট যাহা থাকিবে তাহাকে বিপরীত sign বিশিষ্ট করিয়া উত্তর হইবে। যথা, যদি $-a+2$ অবশিষ্ট থাকে, তবে উত্তর হইবে $a-2$. (2) কত বিয়োগ করিলে পূর্ণবর্গ হইবে প্রশ্ন থাকিলে, অবশিষ্ট যাহা তাহাই উত্তর হয়।]

উদা. 31. Find for what value of n will $16x^4-24x^3+41x^2-nx+16$ be a perfect square. [C. U. '44]

$$
\begin{array}{l|l}
 & 16x^4-24x^3+41x^2-nx+16 \quad \big|\; 4x^2-3x+4 \\
 & 16x^4 \\ \hline
8x^2-3x & -24x^3+41x^2-nx+16 \\
 & -24x^3+9x^2 \\ \hline
8x^2-6x+4 & 32x^2-nx+16 \\
 & 32x^2-24x+16 \\ \hline
 & 24x-nx
\end{array}
$$

এখানে যদি $24x-nx=0$ হয়, তাহা হইলে রাশিটি পূর্ণবর্গ হইবে।

$\therefore\ 24x-nx=0,\quad \therefore\ nx=24x,\quad \therefore\ n=24$ (উত্তর)।

উদা. 32. If $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+c$ is a perfect square, find c.

প্রদত্ত রাশি $=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+c$

$=(a+4)(a+6)+c$ [$x^2+5x=a$ ধরিয়া,] $=a^2+10a+24+c$

$=a^2+2.5.a+(5)^2+c-1=(a+5)^2+c-1.$

এক্ষেত্রে রাশিটি পূর্ণবর্গ হইবে যদি $c-1=0$ হয়। $\therefore$ এখানে $c=1$.

উদা 33. Find the condition that x^2+px+q is a perfect square. [G. U. '51]

$$\begin{array}{l|l} & x^2+px+q \mid x+\frac{p}{2} \\ & x^2 \\ 2x+\frac{p}{2} & px+q \\ & px+\frac{p^2}{4} \\ & -\frac{p^2}{4}+q \end{array}$$

এক্ষেত্রে রাশিটি পূর্ণবর্গ হইবে যদি $-\frac{p^2}{4}+q=0$ হয়, অর্থাৎ যদি $p^2=4q$ হয়। ∴ নির্ণেয় সর্ত হইল $p^2=4q$.

উদা. 34. Find the condition that px^2+qx+c may be a perfect square.

$$\begin{array}{l|l} & px^2+qx+c \mid x\sqrt{p}+\frac{q}{2\sqrt{p}} \\ & px^2 \\ 2x\sqrt{p}+\frac{q}{2\sqrt{p}} & qx+c \\ & qx+\frac{q^2}{4p} \\ & c-\frac{q^2}{4p} \end{array}$$

অতএব, $c-\frac{q^2}{4p}=0$ হইলে, বা, $c=\frac{q^2}{4p}$ হইলে, বা $q^2=4pc$ হইলে রাশিটি পূর্ণবর্গ হইবে। ∴ নির্ণেয় সর্ত হইল $q^2=4pc$.

Exercise 8

Find the square root of the following :—

1. $a^2+2ab+b^2$.
2. $x^4-4x^3y+18x^2y^2-28xy^3+49y^4$. [C. U. '33]
3. $x^6+6x^5+x^4-20x^3+28x^2-16x+4$. [C. U. '49]
4. $x^4-2ax^3+5a^2x^2-4a^3x+4a^4$. [C. U. '26]
5. $a^{-4}+b^{-4}-a^{-2}b^{-2}+2a^{-3}b^{-1}-2a^{-1}b^{-3}$
6. $4x^{\frac{3}{2}}-12x^{\frac{3}{4}}+25-24x^{-\frac{3}{4}}+16x^{-\frac{3}{2}}$.
7. $49x^4+36y^4+109x^2y^2-70x^3y-60xy^3$. [C. U. '18]

8. $x^4-x^3-\frac{7x^2}{4}+x+1.$ [C. U. '13]

9. $x^4-6x^3+2ax(x-3)+9x^2+a^2.$

10. $1+2a+2a^2+a^3+\frac{a^4}{4}.$ [C. U. '17]

11. $x^2-6x+5+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}.$ [C. U. '16]

12. $\frac{x^2}{y^2}-\frac{2x}{y}+3-\frac{2y}{x}+\frac{y^2}{x^2}.$ [C. U. 1909]

13. $4a^4+9a^{-4}+6a^{-2}+4a^2+13$

14. $x^4-2x^3+\frac{3x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}.$ [C. U. '25, '51]

15. $x^4-2x^2+3-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}.$ [C. U. '34]

16. $x^{\frac{4}{3}}-4x+1+6x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}.$

17. $\frac{x^4}{4}+4x^2+\frac{ax^2}{3}+\frac{a^2}{9}-2x^3-\frac{4ax}{3}.$ [C. U. '19 , Pat '18]

18. $x^4+6x^3+11x^2+8x+7+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}.$ [C. U. '32]

19. $x^4+\frac{1}{x^2}+2x+6+6x^3+9x^2.$ [C. U. '50]

20. $x^4+4x+2+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}.$ [C. U. '28, '39, '42]

21. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-\frac{7}{4}.$ [D. B. '22 , B. U.]

22. $4x^3+5+x^{-3}-4x^{\frac{3}{2}}-2x^{-\frac{3}{2}}.$

23. $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x-\frac{1}{x}\right)-1.$

24. $\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-2\left(a+\frac{1}{a}\right)+3.$ [A. U.]

25. $4a^4+9\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+12a^2\left(a+\frac{1}{a}\right)+18.$ [Pat. '28]

26. $4x^4-12x^3y+25x^2y^2-24xy^3+16y^4.$ [G. U. '50]

27. $x^4-2ax^3+(a^2+2b^2)x^2-2ab^2x+b^4.$ [C. U. '48]

(27 ও 28এর অঙ্ক বন্ধনী তুলিয়া কষ)

28. $x^6+\frac{1}{x^6}-4x^4+4\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+2.$ [E.B.S.B. '48 ; B.U.]

29. $6x^{\frac{4}{3}}+9x^2-4-11x^{\frac{2}{3}}+4x^{-\frac{2}{3}}.$ [Pat. U. '29]

30. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+1.$ [G. U. '49]

31. $(3x^2-11x+6)^2+12x(3x-2)^2.$ [M. U. 1905]

[Hints : রাশিটি $=\{(3x-2)(x-3)\}^2+12x(3x-2)^2$

$=(3x-2)^2(x^2-6x+9)+12x(3x-2)^2$

$=(3x-2)^2(x^2+6x+9)=(3x-2)^2(x+3)^2\cdots\cdots$]

32. $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12.$ [C.U. '46 ; W.B.S.F. '52]

33 $(x-1)(x-4)(x-7)(x-10)+81.$

34. $x^4+y^4+(x+y)^4.$ [Pat. U. '26]

[Hints : রাশিটি $=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+\{(x+y)^2\}^2=(x^2+y^2)^2$
$-2x^2y^2+(x^2+y^2+2xy)^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+(x^2+y^2)^2$
$+4x^2y^2+4xy(x^2+y^2)=2(x^2+y^2)^2+4xy(x^2+y^2)+2x^2y^2$
$=2\{(x^2+y^2)^2+2xy(x^2+y^2)+(xy)^2\}=2(x^2+y^2+xy)^2$

$\therefore$ বর্গমূল $=\pm\sqrt{2}(x^2+y^2+xy)$]

35. $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x^2-1}+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2.$

36. $14-6\sqrt{5}$ 37. $5-2\sqrt{6}$ 38. $4+\sqrt{\ }$

39. $33-4\sqrt{35}$ 40. $ax-2a\sqrt{ax-a^2}$

41. $\sqrt{48}-\sqrt{45}$ 42. $\sqrt{252}-\sqrt{245}$

43. $2x+2\sqrt{x^2-9y^2}$ 44. $12x+2y-4\sqrt{6xy}$

45. Prove that $\sqrt{m+\sqrt{n}}$ cannot be expressed in the form of $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ unless m^2-n is a perfect square.

46. Find a value of x which will make $x^4+6x^3+11x^2+3x+31$ a perfect square. [C U. '27, '41]

47. For what value of x will $9x^4-12x^3+22x^2-13x+12$ be a perfect square ?

48. Find the numerical value of c which will make $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+c$ a perfect square. [C. U. '50]

49. Find m so that $16x^4-24x^3-mx^2-24x+16$ may be a perfect square. [Pat. U. '26]

50. What must be added to $4a^4-12a^3-7a^2+23a+14$ to make the sum a perfect square ? [C.U. '21 ; W.B.S.F. '53]

51. What must be added to $x^4-2x^3-3x^2+4x-6$ to make it a perfect square ?

52. What must be taken from $a^4-4a^3+6a^2-5a+2$ to make the remainder a perfect square ?

53. What must be subtracted from $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+2$ to make it a perfect square ?

54. Find the condition that x^2-px+q may be a perfect square.

55. Find the condition that mx^2+nx+p may be a perfect square.

56. Prove that $33\times34\times35\times36+1$ is a perfect square.

57. Show that $249\times247\times245\times243+16$ is a perfect square.

58. Find the first three terms of the square root of $1+a^2$.

59. For what value of a will $x^4+4x^3+8x^2+8x+a^2$ be a perfect square ?

60. Find the square root of

$$\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}-2\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)+3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)-4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+5.$$

ঘনমূল নির্ণয় (Extraction of cube root)

46. কোন পদের ঘনমূল নির্ণয়ের প্রক্রিয়া সম্বন্ধে পূর্বে আলোচনা করা হইয়াছে। এক্ষণে কোন রাশির ঘনমূল নির্ণয়ের প্রক্রিয়া দেখান হইতেছে।

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, এই সূত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$এর ঘনমূল $a+b$. এখন এই ঘনমূলের a ও b পদ দুইটি কিরূপে নির্ণয় করা যায় তাহাই স্থির করিতে হইবে।

প্রথমে প্রদত্ত রাশিকে a বা bএর অধঃক্রম অনুসারে সাজাইতে হইবে। এখন দেখা যায় যে, রাশিটির প্রথম পদ a^3এর ঘনমূল a. ইহাকে ঘনমূলের প্রথম পদ করিয়া বসান হইল এবং রাশিটি হইতে a^3 বিয়োগ করিয়া $3a^2b+3ab^2+b^3$ বা $(3a^2+3ab+b^2)\times b$ অবশিষ্ট পাওয়া গেল। অতএব এই অবশিষ্ট রাশিকে $3a^2+3ab+b^2$ দিয়া ভাগ করিয়াই ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ bকে পাওয়া যায়। এখন দেখ ভাজক $3a^2+3ab+b^2$এ নিম্নরূপ তিনটি পদ আছে :—

(1) ঘনমূলের পূর্ব বা প্রথম পদ aএর বর্গের 3 গুণ অর্থাৎ $3a^2$;

(2) প্রথম পদ a এবং নূতন দ্বিতীয় পদ bএর গুণফলের 3 গুণ অর্থাৎ $3ab$;

(3) দ্বিতীয় পদ bএর বর্গ অর্থাৎ b^2.

এই প্রক্রিয়াটিকে নিম্নে সাজান হইতেছে :—

উদা. 1.

$$
\begin{array}{lr|l}
 & & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3(a+b \\
 & & a^3 \\
3(a)^2=3a^2 & & 3a^2b+3ab^2+b^3 \\
3\times a\times b= & +3ab & \\
(b)^2= & +b^2 & \\
\hline
 & 3a^2+3ab+b^2 & 3a^2b+3ab^2+b^3 \\
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $=a+b$.

উদা. 2. Find the cube root of $8x^3-12x^2+6x-1$.

$$
\begin{array}{lr|l}
 & & 8x^3-12x^2+6x-1(2x-1 \\
 & & 8x^3 \\
3(2x)^2=12x^2 & & -12x^2+6x-1 \\
3\times 2x\times -1= & -6x & \\
(-1)^2= & +1 & \\
\hline
 & 12x^2-6x+1 & -12x^2+6x-1 \\
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $=2x-1$.

[দ্রষ্টব্য : দ্বিতীয় পদটি নির্ণয় করার জন্য দেখিবে $12x^2$কে কি দিয়া গুণ করিলে প্রথম অবশিষ্টের প্রথম পদ $-12x^2$ হয় ; সুতরাং দ্বিতীয় পদ হইবে -1. অনুরূপেও দেখ প্রদত্ত রাশির শেষ পদ -1এর ঘনমূলই হইবে ঘনমূলের শেষ বা দ্বিতীয় পদ।]

উদা. 3. Find the cube root of $32-\frac{16}{3a^3}-64a^3+\frac{8}{27a^6}$

এখানে রাশিটি a-র ঊর্ধ্বক্রমে সাজাইয়া পাই—

$$\frac{8}{27a^6}-\frac{16}{3a^3}+32-64a^3\left(\frac{2}{3a^2}-4a.\right.$$

$$\frac{8}{27a^6}$$

$$3\left(\frac{2}{3a^2}\right)^2=\frac{4}{3a^4} \qquad -\frac{16}{3a^3}+32-64a^3$$

$$3\times\frac{2}{3a^2}\times(-4a)=-\frac{8}{a}$$

$$(-4a)^2=16a^2$$

$$\frac{4}{3a^4}-\frac{8}{a}+16a^2 \qquad -\frac{16}{3a^3}+32-64a^3$$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $=\frac{2}{3a^2}-4a.$

উদা. 4. Find the cube root of 79507.

এখানে দেখা যাইতেছে যে 79507 সংখ্যাটি 64,000 এবং 125,000এর অর্থাৎ $(40)^3$ ও $(50)^3$এর মধ্যবর্তী. সুতরাং উহার ঘনমূলটি 40 ও 50এর মধ্যবর্তী দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা হইবে।

$$\begin{array}{rr|l} & 79507 & \left(40+3=43\right. \\ & 64000 & \\ \hline 3(40)^2= & 4800 & 15507 \\ 3\times40\times3= & 360 & \\ (3)^2= & 9 & \\ \hline & 5169 & 15507 \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $=43.$

[দ্রষ্টব্য : এখানে সংখ্যাটির এককের অঙ্ক 7 আছে, আবার 3 ভিন্ন অন্য কোন সংখ্যার ত্রিঘাতের এককের অঙ্ক 7 হইতে পারে না। $\therefore$ ঘনমূলের দ্বিতীয় অঙ্ক 3 ধরা হইল।]

উদা. 5. Find the cube root of $8a^6+12a^5b-30a^4b^2 \quad 35a^3b^3+45a^2b^4+27ab^5-27b^6$.

$$8a^6+12a^5b-30a^4b^2-35a^3b^3+45a^2b^4+27ab^5-27b^6\,(2a^2+ab-3b^2$$

$$8a^6$$

$$12a^5b-30a^4b^2-35a^3b^3$$

$$3(2a^2)^2=12a^4$$

$$3(2a^2)\times ab=\quad +6a^3b$$

$$(ab)^2=\quad +a^2b^2$$

$$12a^4+6a^3b+a^2b^2 \qquad 12a^5b+6a^4b^2+a^3b^3$$

$$-36a^4b^2-36a^3b^3+45a^2b^4+27ab^5-27b^6$$

$$3(2a^2+ab)^2=12a^4+3a^2b^2+12a^3b$$

$$3(2a^2+ab)\times(-3b^2)=\quad -18a^2b^2 \quad -9ab^3$$

$$(-3b^2)^2=\quad +9b^4$$

$$12a^4+12a^3b-15a^2b^2-9ab^3+9b^4 \qquad -36a^4b^2-36a^3b^3-45a^2b^4-27ab^5-27b^6$$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $=2a^2+ab-3b^2$.

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে ঘনমূলের প্রথম পদ $2a^2$ পাওয়া গিয়াছে। উহার বর্গের 3 গুণ করিলে $12a^4$ হয়, উহাকে ab দিয়া গুণ করিলে প্রথম অবশিষ্টের প্রথম পদ $12a^5b$ হয়, সুতরাং ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ হইল $+ab$. এক্ষণে পূর্বের নিয়মে প্রথম ভাজক হইল $12a^4+6a^3b+a^2b^2$, উহাকে ab দিয়া গুণ করিয়া গুণফল প্রথম অবশিষ্ট হইতে বিয়োগ করিয়া দ্বিতীয় অবশিষ্ট পাওয়া গেল। পুনবায় ঘনমূলের যে অংশ পাওয়া গিয়াছে তাহার বর্গের 3 গুণ করিয়া হইল $12a^4+3a^2b^2+12a^3b$. এখন ইহার প্রথম পদ $12a^4$ দিয়া দ্বিতীয় অবশিষ্টের প্রথম পদ $-36a^4b^2$কে ভাগ করিলে $-3b^2$ হয়, সুতরাং উহাই ঘনমূলের তৃতীয় পদ হইবে। তারপর পূর্বের নিয়মে প্রক্রিয়াটি সম্পূর্ণ করা হইল।]

Exercise 9

Find the cube root of :—

1. $125a^9b^{12}$ 2. $-729x^6y^{-3}$ 3. $-\dfrac{216a^{15}}{343b^{18}}$

4. $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$ 5. a^3-3a^2+3a-1

6. $1+3a+6a^2+7a^3+6a^4+3a^5+a^6$

7. $8a^3x^3-27b^3y^3-36a^2x^2by+54axb^2y^2$

8. $54-27x^3+\dfrac{8}{x^6}-\dfrac{36}{x^3}$ 9. $\dfrac{a^3}{8}+\dfrac{3a^2}{4}+\dfrac{3a}{2}+1$

10. 614125 11. $64x^6-125y^6+300x^2y^4-240x^4y^2$

12. $8a^3+b^3+c^3+12a^2b+12abc+6ab^2+12a^2c+6ac^2+3b^2c+3bc^2$

13. $8a^6+12a^5-30a^4-35a^3+45a^2+27a-27$

14. $\frac{1}{8}a^3-\frac{1}{4}a^2b+\frac{1}{6}ab^2-\frac{1}{27}b^3$ [M. U. 1861]

15. $\dfrac{a^3}{b^3}-\dfrac{b^3}{a^3}-3\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\right)+5$ [B. U. 1892]

16. $x^3+\dfrac{8}{x^3}-12x^2-\dfrac{48}{x^2}+54x+\dfrac{108}{x}-112$ [B. U. 1882]

For what value of x will $8x^3-12x^2+7x-3$ be a perfect cube ?

Quadratic Equation (দ্বিঘাত সমীকরণ)

47. দ্বিঘাত সমীকরণ। যে সমীকরণের অজ্ঞাত রাশিটি দ্বিঘাত অপেক্ষা উচ্চতর ক্রমের নহে (অর্থাৎ যাহাতে অজ্ঞাত রাশিটির সর্বোচ্চ ঘাত 2) তাহাকে **দ্বিঘাত** (quadratic) **সমীকরণ** বা **দ্বিতীয় মানের** (of the second degree) সমীকরণ বলে। যথা, $x^2=25$, $3x^2+5x=4$, $ax^2+bx+c=0$, ইত্যাদি।

48. অমিশ্র এবং মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ। (1) যে সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটি কেবলমাত্র দ্বিঘাত-বিশিষ্ট, তাহাকে অমিশ্র দ্বিঘাত (pure quadratic) সমীকরণ বলে। যথা, $x^2=4$, $ax^2-5=0$.

(2) যে সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটি প্রথম ও দ্বিতীয় ঘাতের হয়, তাহাকে **মিশ্র দ্বিঘাত** (adfected quadratic) সমীকরণ বলে। যথা, $3x^2-4x=15$. এরূপ সমীকরণের সাধারণ আকার $ax^2+bx+c=0$, cকে constant (ধ্রুবক) term বা absolute term বলে। এখানে b ও cর যে-কোন মান হইতে পারে, এবং a-র শূন্য ভিন্ন যে-কোন মান হইতে পারে। a-র মান শূন্য হইলে ax^2 শূন্য হয় বলিয়া সমীকরণটি দ্বিঘাতের থাকে না।

49. অমিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

প্রথমে অজ্ঞাত রাশিগুলিকে বামপক্ষে এবং জ্ঞাত রাশিগুলিকে ডানপক্ষে লইয়া গিয়া সাধারণভাবে x^2এর মান নির্ণয় করিয়া তাহার বর্গমূল নির্ণয় করিলে অজ্ঞাত রাশির মান পাওয়া যায়। xএর মানকে সমীকরণের বীজ (roots) বলে।

উদাহরণমালা 11

উদা. 1. Solve $3x^2-36=64-x^2$.

$3x^2-36=64-x^2$,

বা, $3x^2+x^2=64+36$ [পক্ষান্তর করিয়া], বা, $4x^2=100$,

বা, $x^2=25$, $\therefore x=\pm 5$ (অর্থাৎ $x=5$ অথবা -5).

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে $x^2=25$এর উভয়পক্ষের বর্গমূল লইলে $\pm x=\pm 5$ হয়, এবং ইহা $x=\pm 5$ লিখিলেও একই অর্থ বুঝায়। এরূপ সমীকরণের বীজ দুইটি সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইয়া থাকে।]

উদা. 2 Solve $2x-\frac{3}{x}=\frac{x}{2}$.

উভয়পক্ষকে $2x$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$4x^2-6=x^2$, বা, $3x^2=6$, বা, $x^2=2$, $\therefore x=\pm\sqrt{2}$.

[**অন্য প্রণালী**] $\frac{2x^2-3}{x}=\frac{x}{2}$,

বা, $4x^2-6=x^2$. [বজ্রগুণন দ্বারা] [এর পর পূর্বের মত হইবে]

উদা. 3. Solve $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+5}=\frac{1}{2}$. [C. U. '19]

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+5}=\frac{1}{2}, \quad \text{বা,} \quad \frac{x+5+2x+2}{(x+1)(x+5)}=\frac{1}{2},$$

বা, $\frac{3x+7}{x^2+6x+5}=\frac{1}{2}$, বা, $x^2+6x+5=6x+14$,

বা, $x^2=14-5=9$, $\therefore$ $x=\pm 3$.

উদা. 4. $\frac{3x+4}{x+2}=\frac{x+5}{x+1}$.

বজ্রগুণন দ্বারা পাই, $3x^2+7x+4=x^2+7x+10$,

বা, $2x^2=6$, বা, $x^2=3$, $\therefore$ $x=\pm\sqrt{3}$.

উদা. 5. Solve $\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{10}{3}$ [C. U. '12 , D. B. '22]

বা, $\frac{(x+4)^2+(x-4)^2}{(x-4)(x+4)}=\frac{10}{3}$, বা, $\frac{2x^2+32}{x^2-16}=\frac{10}{3}$,

বা, $10x^2-160=6x^2+96$, বা, $4x^2=256$, বা, $x^2=64$ $\therefore$ $x=\pm 8$.

50. মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

(1) উৎপাদক নির্ণয় দ্বারা সমাধান

উদা. 6. Solve $4x^2+25x-351=0$. [D. B. '27]

$4x^2+25x-351=0$,

বা, $4x^2+52x-27x-351=0$,

বা, $4x(x+13)-27(x+13)=0$, বা, $(x+13)(4x-27)=0$,

এখানে $\because$ দুইটি উৎপাদকের গুণফল শূন্য, $\therefore$ উহাদের একটি অবশ্যই শূন্য হইবে। যদি $x+13=0$ হয়, তবে $x=-13$; আর যদি $4x-27=0$ হয়, তবে $4x=27$. $\therefore$ $x=\frac{27}{4}=6\frac{3}{4}$. $\therefore$ $x=-13$ অথবা $6\frac{3}{4}$.

উদা. 7. Solve $(x-7)(x-19)=64$. [C. U. '18]

(বন্ধনী তুলিয়া) $x^2-26x+133=64$, বা, $x^2-26x+69=0$,

বা, $x^2-23x-3x+69=0$, বা, $x(x-23)-3(x-23)=0$,

বা, $(x-23)(x-3)=0$,

$\therefore$ হয় $x-23=0$ অথবা $x-3=0$, $\therefore$ $x=23$ বা 3.

উদা. 8. Solve $\frac{x-2}{x+2}+\frac{6(x-2)}{(x-6)}=1.$ [C. U. '51]

এখানে, $\frac{6(x-2)}{x-6}=1-\frac{x-2}{x+2}$, বা, $\frac{6(x-2)}{x-6}=\frac{x+2-x+2}{x+2}$

বা, $\frac{6(x-2)}{x-6}=\frac{4}{x+2}$, বা, $\frac{3(x-2)}{x-6}=\frac{2}{x+2}$,

বা, $3(x^2-4)=2(x-6)$, বা, $3x^2-12=2x-12$,

বা, $3x^2-2x-12+12=0$, বা, $3x^2-2x=0$, বা, $x(3x-2)=0$,

$\therefore$ হয় $x=0$ অথবা $3x-2=0$. অতএব, $x=0$ বা $\frac{2}{3}$.

উদা. 9. Solve $x+\frac{1}{x}=25\frac{1}{25}$. [C.U. 14, '39 Sup. ; D. B. '25]

$x+\frac{1}{x}=25\frac{1}{25}$, বা, $\frac{x^2+1}{x}=\frac{626}{25}$, বা, $25x^2+25=626x$,

বা, $25x^2-626x+25=0$, বা, $25x^2-625x-x+25=0$,

বা, $25x(x-25)-1(x-25)=0$, বা, $(x-25)(25x-1)=0$,

$\therefore$ হয় $x-25=0$, অথবা $25x-1=0$, $\therefore$ $x=25$ বা $\frac{1}{25}$.

*উদা. 10. Solve $(x-3)(x-4)=\frac{34}{33^2}$.

মনে কর $a=33$; এক্ষণে $(x-3)(x-4)=\frac{34}{a^2}$,

বা, $a^2(x-3)(x-4)=34$, বা, $a^2(x-3)(x-4)=33+1$

বা, $a(x-3).a(x-4)=a+1$

বা, $(ax-3a)(ax-4a)-a-1=0$

বা, $(ax-3a)(ax-4a)+(ax-4a)-(ax-3a)-1=0$

$[\because (ax-4a)-(ax-3a)=-a$ হয় $]$

বা, $(ax-4a)(ax-3a+1)-1(ax-3a+1)=0$,

বা, $(ax-3a+1)(ax-4a-1)=0$, $\therefore$ হয় $ax-3a+1=0$

অথবা $ax-4a-1=0$; $\therefore$ হয় $x=\frac{3a-1}{a}=3-\frac{1}{a}=3-\frac{1}{33}=2\frac{32}{33}$;

অথবা, $x=\frac{4a+1}{a}=4+\frac{1}{a}=4+\frac{1}{33}=4\frac{1}{33}$.

$\therefore\quad x=2\frac{32}{33}$ বা $4\frac{1}{33}$.

উদা. 11. Solve $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}$. [C. U. '21]

এক্ষেত্রে, $\frac{x+b-x}{x(x+b)}=\frac{a+b-a}{a(a+b)}$, বা, $\frac{b}{x^2+bx}=\frac{b}{a^2+ab}$,

বা, $x^2+bx=a^2+ab$, বা, $x^2+bx-a^2-ab=0$,

বা, $(x+a)(x-a)+b(x-a)=0$, বা, $(x-a)(x+a+b)=0$,

$\therefore\quad x=a$ বা $-(a+b)$.

উদা. 12. Solve $x=\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-x}}}$. [C. U, '30]

এখানে, $x=\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\cfrac{4-2x-1}{2-x}}}$, বা, $x=\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\cfrac{3-2x}{2-x}}}$, বা, $x=\cfrac{1}{2-\cfrac{2-x}{3-2x}}$

বা, $x=\cfrac{1}{\cfrac{6-4x-2+x}{3-2x}}$, বা, $x=\cfrac{1}{\cfrac{4-3x}{3-2x}}$, বা, $x=\frac{3-2x}{4-3x}$,

বা, $4x-3x^2=3-2x$, বা, $-3x^2+6x-3=0$,

বা, $x^2-2x+1=0$ [-3 দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $(x-1)^2=0 \quad \therefore\quad x=1, 1$.

[দ্রষ্টব্য : $(x-1)^2=0$ অর্থাৎ $(x-1)(x-1)=0 \;\therefore\; x$-এর মান 1,1 হইবে]

উদা. 13. Solve $\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2}=2$. [D. B. '49]

বা, $\frac{\{(x+1)-(x-1)\}\{(x+1)^2+(x+1)(x-1)+(x-1)^2\}}{\{(x+1)+(x-1)\}\{(x+1)-(x-1)\}}=2$

[a^3-b^3 ও a^2-b^2-এর formula হইতে]

বা, $\dfrac{(x+1)^2+(x+1)(x-1)+(x-1)^2}{(x+1)+(x-1)}=2,$

বা, $\dfrac{x^2+2x+1+x^2-1+x^2-2x+1}{2x}=2,$ বা $\dfrac{3x^2+1}{2x}=2$

বা, $3x^2+1=4x,$ বা $3x^2-4x+1=0,$ বা $3x^2-3x-x+1=0,$

বা, $(x-1)(3x-1)=0, \quad \therefore \quad x=1$ বা $\frac{1}{3}.$

উদা. 14. Solve $\dfrac{1}{a+b+x}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{x}$ [D. B. '40, '43, '48]

বা, $\dfrac{1}{a+b+x}=\dfrac{bx+ax+ab}{abx},$বা $(a+b+x)(bx+ax+ab)=abx,$

বা, $(a+b+x)(bx+ax+ab)-abx=0,$

বা, $(a+b)(a+x)(b+x)=0,$ বা, $(a+x)(b+x)=0,$

$\therefore \quad x=-a$ বা $-b.$

(2) পূর্ণবর্গে পরিণত করিয়া সমাধান

প্রথমে সমীকরণটিকে সাধারণ আকারে পরিণত করিয়া x-বিহীন পদগুলিকে ডানদিকে পক্ষান্তর কর। উহার উভয় পক্ষকে x^2এর সহগ দ্বারা ভাগ কর। এখন xএর **সহগের অর্ধেকের বর্গ** উভয় পক্ষে যোগ কর। ইহাতে বামপক্ষটি পূর্ণবর্গ হইয়া যাইবে।

উদা. 15. Solve $x^2-26x=407.$ [D. B. '29]

$x^2-26x=407,$ বা, $x^2-26x+(13)^2=407+(13)^2,$

বা, $(x-13)^2=407+169=576,$ বা, $(x-13)=\pm\sqrt{576},$

বা, $x-13=\pm 24, \quad \therefore \quad x=13\pm 24=37$ বা $-11.$

[দ্রষ্টব্য : এইখানে xএর সহগ 26, উহার অর্ধেক 13, $\therefore$ $(13)^2$ উভয়দিকে যোগ করা হইল। xএর মান একটি হইল $(13+24)$, অন্যটি $(13-24)$]

উদা. 16. Solve $10x^2-69x+45=0.$ [D. B. '30]

$10x^2-69x+45=0,$ বা, $x^2-\dfrac{69}{10}x+\dfrac{45}{10}=0$

বা, $x^2-\frac{69}{10}x=-\frac{9}{2}$, বা, $x^2-\frac{69}{10}x+\left(\frac{69}{20}\right)^2=\left(\frac{69}{20}\right)^2-\frac{9}{2}$,

বা, $\left(x-\frac{69}{20}\right)^2=\frac{4761}{400}-\frac{9}{2}=\frac{2961}{400}$, বা, $x-\frac{69}{20}=\pm\sqrt{\frac{2961}{400}}$,

$\therefore\ x=\frac{69}{20}\pm\frac{\sqrt{2961}}{20}=\frac{69\pm\sqrt{2961}}{20}$.

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে প্রথমে x^2এর সহগ 10 দ্বারা ভাগ করা হইল। তারপর xএর সহগ $\frac{69}{10}$এর অর্ধেক $\frac{69}{20}$এর বর্গ উভয় দিকে যোগ করা হইল। 2961 পূর্ণবর্গ সংখ্যা নহে,

সেজন্য $\sqrt{\frac{2961}{400}}=\frac{\sqrt{2961}}{\sqrt{400}}=\pm\frac{\sqrt{2961}}{20}$ হইল।]

উদা. (17.) Solve $ax^2+bx+c=0$. [C. U. '46]

উভয়পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$,

বা, $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$, বা, $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$

[উভয়পক্ষে $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ যোগ করিয়া]

বা, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, বা, $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\therefore\ x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সকল দ্বিঘাত সমীকরণকে, $ax^2+bx+c=0$ এই সাধারণ আকারে পরিণত করা যায়। তারপর $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এই সূত্রের সাহায্যে তাহার সমাধান করা যায়। এই সূত্রটি ভালভাবে বুঝিয়া মুখস্থ করিবে। **ইহার ব্যাখ্যা :** সমীকরণে আছে x^2এর সহগ a, এবং xএর সহগ b এবং x-বিহীন পদ c. সূত্রের লব বিপরীত sign-যুক্ত xএর সহগ, তারপর $\pm\sqrt{}$ চিহ্নের মধ্যে হইবে xএর সহগের বর্গ

(অর্থাৎ b^2) বিযুক্ত x^2এর সহগ ও x-বিহীন পদের গুণফলের 4 গুণ অর্থাৎ $-4ac$. আর হরে হইবে x^2এর সহগের দ্বিগুণ। এখানে xএর value দুইটি কি কি হইল দেখ। একটি হইল $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, অন্যটি হইল $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.]

17. (*a*) Apply the above formula to find the roots of the equation $x^2-2\sqrt{3}x-13=0$. [C. U. '46]

(3) **সূত্রের সাহায্যে সমাধান**

উদা. 18. Solve $x^2-2\sqrt{17}x-8=0$. [C U '47]

এখানে, $x=\frac{2\sqrt{17}\pm\sqrt{(2\sqrt{17})^2-4\times 1\times -8}}{2\times 1}$

$=\frac{2\sqrt{17}\pm\sqrt{68+32}}{2}=\frac{2\sqrt{17}\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{2\sqrt{17}\pm 10}{2}=\sqrt{17}\pm 5.$

উদা. 19. Solve $\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}$

$+\frac{1}{(x-3)(x-4)}=\frac{1}{6}$. [C. U. '37]

বা, $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{6}$,

বা, $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{6}$, বা, $\frac{x-1-x+4}{(x-4)(x-1)}=\frac{1}{6}$,

বা, $\frac{3}{x^2-5x+4}=\frac{1}{6}$, বা, $x^2-5x+4=18$, বা $x^2-5x-14=0$,

বা, $(x-7)(x+2)=0$, $\therefore$ $x=7, -2$.

[**দ্রষ্টব্য :** $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$কে $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$ এইরূপ আকারে লেখা যায়, কারণ $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$ করিয়া ঐ $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$ হয়। এইভাবে বাকী পদ দুইটিও লেখা হইল।]

উদা. 20. Find the roots of the quadratic equation $ax^2+2bx+c=0$. [C. U. '45 ; G. U. '49]

[এখানে xএর value দুইটি জানিতে চাহিতেছে অর্থাৎ সমীকরণটি সমাধান করিতে হইবে।]

$ax^2+2bx+c=0$, বা, $ax^2+2bx=-c$,

বা, $x^2+\frac{2b}{a}x=-\frac{c}{a}$, বা, $x^2+\frac{2b}{a}x+\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a}$,

বা, $\left(x+\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b^2-ac}{a^2}$, বা, $x+\frac{b}{a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}$,

$\therefore\quad x=-\frac{b}{a}\pm\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$.

[সূত্র সাহায্যে] $x=\frac{-2b\pm\sqrt{(2b)^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-2b\pm2\sqrt{b^2-ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$.

উদা. 21. Solve $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+2a}+\frac{1}{x+3a}=\frac{3}{x}$. [C. U. '50]

এখানে সমীকরণটি হইতে, $\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2a}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3a}-\frac{1}{x}=0$,

বা, $\frac{x-x-a}{x(x+a)}+\frac{x-x-2a}{x(x+2a)}+\frac{x-x-3a}{x(x+3a)}=0$,

বা, $\frac{-a}{x(x+a)}+\frac{-2a}{x(x+2a)}+\frac{-3a}{x(x+3a)}=0$,

বা, $\frac{1}{x+a}+\frac{2}{x+2a}+\frac{3}{x+3a}=0$, বা, $\frac{1}{x+a}+\frac{3}{x+3a}=\frac{-2}{x+2a}$,

বা, $\frac{x+3a+3x+3a}{(x+a)(x+3a)}=\frac{-2}{x+2a}$, বা, $\frac{4x+6a}{x^2+4ax+3a^2}=\frac{-2}{x+2a}$,

বা, $\frac{2x+3a}{x^2+4ax+3a^2}=\frac{-1}{x+2a}$,

বা, $2x^2+7ax+6a^2=-x^2-4ax-3a^2,$

বা, $3x^2+11ax+9a^2=0,$

$$\therefore \quad x=\frac{-11a\pm\sqrt{(11a)^2-4.3.9a^2}}{6}=\frac{-11a\pm\sqrt{13a^2}}{6}$$

$$=\frac{-11a\pm a\sqrt{13}}{6}=\frac{-11\pm\sqrt{13}}{6}.a.$$

উদা. 22. Solve $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0.$

[C. U. '26, '29 ; D. B. '50]

উভয়পক্ষকে $(x-a)(x-b)(x-c)$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)=0,$

বা, $x^2-(b+c)x+bc+x^2-(c+a)x+ac+x^2-(a+b)x+ab=0,$

বা, $3x^2-(b+c+c+a+a+b)x+ab+bc+ca=0,$

বা, $3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0,$

$$\therefore \quad x=\frac{2(a+b+c)\pm\sqrt{4(a+b+c)^2-4.3(ab+bc+ca)}}{6}$$

$$=\frac{2(a+b+c)\pm2\sqrt{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)}}{6}$$

$$=\frac{(a+b+c)\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3}$$

উদা. 23. Solve, without assuming any formula, the equation $x^2-11x=82052.$ [C. U. '42]

$x^2-11x=82052,$ বা, $x^2-11x+(\frac{11}{2})^2=82052+(\frac{11}{2})^2,$

বা, $(x-\frac{11}{2})^2=82052+\frac{121}{4}=\frac{328329}{4},$

বা, $x-\frac{11}{2}=\pm\frac{573}{2}$ (উভয় পক্ষের বর্গমূল লইয়া)

$\therefore \; x=\frac{11}{2}\pm\frac{573}{2}=292,$ বা $-281.$

(4) শ্রীধর আচার্যের প্রণালী বা হিন্দুপ্রণালী

প্রদত্ত সমীকরণকে প্রথমে $ax+bx+c=0$ এই সাধারণ আকারে পরিণত করিবে। যথা, $(x-2)^2=3x+5$ সমীকরণকে $x^2-4x+4=3x+5$, বা $x^2-7x-1=0$ এইভাবে লিখিবে। x-বিহীন পদ c-কে ডানদিকে লইয়া যাও। উভয় পক্ষকে x^2এর সহগের 4 গুণ (এখানে $4a$) দ্বারা গুণ কর। তাবপর উভয়পক্ষে xএর সহগের বর্গ (এখানে b^2) যোগ কর। ইহাতে বামদিকে একটি পূর্ণবর্গ রাশি হইবে।

উদা. 24. Solve $3x^2-11x+9=0$. [C. U. '35]

এখানে $3x^2-11x=-9$,

বা, $36x^2-132x=-108$ [উভয় পক্ষকে 4×3 দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $36x^2-132x+(11)^2=121-108$ [উভয় পক্ষে xএর সহগের বর্গ বা $(-11)^2$ যোগ করিয়া]

বা, $(6x-11)^2=13$, বা, $6x-11=\pm\sqrt{13}$,

বা, $6x=11\pm\sqrt{13}$, $\therefore\ x=\dfrac{11\pm\sqrt{13}}{6}$.

উদা. 25. Solve $x^2-2\sqrt{7}x-2=0$. [G. U. '48]

এখানে $x^2-2\sqrt{7}x=2$, বা, $4x^2-8\sqrt{7}x=8$

[উভয় পক্ষকে 4×1 দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $4x^2-8\sqrt{7}x+(2\sqrt{7})^2=(2\sqrt{7})^2+8$

[উভয় পক্ষে $(2\sqrt{7})^2$ যোগ করিয়া]

বা, $(2x-2\sqrt{7})^2=28+8=36$,

বা, $2x-2\sqrt{7}=\pm 6$, বা, $2x=2\sqrt{7}\pm 6$; $\therefore\ x=\sqrt{7}\pm 3$.

51. সূচকীয় সমীকরণ

উদা. 26. Solve $4\times 2^{x-1}=8^x$. [D. B. '31]

$4\times 2^{x-1}=8^x$, বা, $2^2\times 2^{x-1}=(2^3)^x$,

বা, $2^{x-1+2}=2^{3x}$, বা, $2^{x+1}=2^{3x}$

$\therefore\ 3x=x+1$, বা, $2x=1$, $\therefore\ x=\frac{1}{2}$.

[দ্রষ্টব্য : এখানে 4 ও 8কে 2-এর ঘাতে প্রকাশ করিয়া $4=2^2$, $8=2^3$ লেখা হইল। এইরূপ করিতে হয়। তারপর দেখ, 2^{x+1} এবং 2^{3x} সমান হওয়ায় 2-এর ঘাত দুইটি অবশ্যই সমান। $\therefore$ $3x=x+1$ লেখা হইল।]

উদা. 27. Solve $2^{x+1}=\sqrt[x]{64}$.

$$2^{x+1}=\sqrt[x]{64}, \quad \text{বা, } 2^{x+1}=64^{\frac{1}{x}}$$

বা, $2^{x+1}=(2^6)^{\frac{1}{x}}$ [এখানে 64কে 2-এর ঘাতে প্রকাশ করা হইল]

বা, $2^{x+1}=2^{\frac{6}{x}}$ $\quad\therefore\quad x+1=\frac{6}{x}$,

বা, $x^2+x=6$, $\quad$ বা, $x^2+x-6=0$,

বা, $(x+3)(x-2)=0$, $\quad\therefore\quad x=2$, বা, -3.

উদা. 28. Solve $(\sqrt{3})^{2x+4}=243$. [C.U. '32, '50 ; G.U. '51]

$(\sqrt{3})^{2x+4}=243$, বা, $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{2x+4}=(3)^5$ [$\because$ $243=3^5$]

বা, $3^{x+2}=3^5$, $\quad\therefore\quad x+2=5$, $\quad\therefore\quad x=3$.

উদা. 29. Solve $9^x=\frac{9}{3^x}$. [P. U. '30]

$9^x=\frac{9}{3^x}$ বা, $(3^2)^x=\frac{9}{3^x}$ বা, $3^{2x}=\frac{9}{3^x}$ বা, $3^{2x}.3^x=9$,

বা, $3^{3x}=3^2$, $\quad\therefore\quad 3x=2$, $\quad\therefore\quad x=\frac{2}{3}$.

উদা. 30. Solve $4^{x^2+x+2}\times 5^{x^2+x+3}=800000$.

$$4^{x^2+x+2}\times 5^{x^2+x+3}=800000,$$

বা, $4^{x^2+x+2}\times 5^{x^2+x+2}\times 5=800000$,

বা, $4^{x^2+x+2}\times 5^{x^2+x+2}=160000$

[উভয় পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $(20)^{x^2+x+2}=(20)^4$, $\quad\therefore\quad x^2+x+2=4$,

বা, $x^2+x-2=0$, বা, $(x-1)(x+2)=0$,

$\therefore$ $x=1$ বা -2.

উদা 31. Solve $4.3^{x+1}=27+9^x$. [C. U. '51]

$4.3^{x+1}=27+9^x$, বা, $4.3^x.3=27+3^{2x}$,

বা, $12.3^x=27+(3^x)^2$, বা, $12p=27+p^2$ [$3^x=p$ ধরিয়া]

বা, $p^2-12p+27=0$, বা, $(p-9)(p-3)=0$, $\therefore$ $p=9$ বা 3.

$\therefore$ $3^x=9=3^2$ অথবা $3^x=3^1$, $\therefore$ $x=2$ বা 1.

উদা. 32. Solve $2^{x+4}+2^{x+1}=144$.

$2^{x+4}+2^{x+1}=144$, বা, $2^x.2^4+2^x.2=144$,

বা, $16.2^x+2.2^x=144$, বা, $18.2^x=144$, বা, $2^x=8=2^3$, $\therefore$ $x=3$.

উদা 33. Solve $a^{2x-3}=b^{2x-3}$.

$a^{2x-3}=b^{2x-3}$, $\therefore$ $\frac{a^{2x-3}}{b^{2x-3}}=1$, বা, $\left(\frac{a}{b}\right)^{2x-3}=1=\left(\frac{a}{b}\right)^0$

$\therefore$ $2x-3=0$, $\therefore$ $x=\frac{3}{2}$ $\left[\because \left(\frac{a}{b}\right)^0=1\right]$

উদা. 34. Solve
$$\left.\begin{aligned} 3^x.9^y &= 27^z \quad (1)\\ 4^x.8^y &= 32^z \cdots (2)\\ 2^x.5^y.7^z &= 70 \cdots (3)\end{aligned}\right\}$$
[C. U. '43]

(1) হইতে পাই $3^x.3^{2y}=3^{3z}$, বা, $3^{x+2y}=3^{3z}$,

$\therefore$ $x+2y=3z$, বা, $x+2y-3z=0\cdots(4)$

(2) ,, ,, $2^{2x}.2^{3y}=2^{5z}$, বা, $2^{2x+3y}=2^{5z}$,

$\therefore$ $2x+3y=5z$, বা, $2x+3y-5z=0\cdots(5)$

এক্ষণে (4) ও (5) হইতে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই,

$$\frac{x}{-10+9}=\frac{y}{-6+5}=\frac{z}{3-4}, \quad \text{বা,} \quad \frac{x}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1},$$

বা, $x=y=z=k$ (মনে কর)।

এক্ষণে (3) হইতে পাই $2^k.5^k.7^k=70$, বা, $(2.5.7)^k=70$,

বা, $70^k=70^1$, $\therefore$ $k=1$.

অতএব, $x=y=z=1$.

উদা. 35. Solve $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}-2=0$. [C. U. '30]

$$x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}-2=0, \text{ বা, } \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2+x^{\frac{1}{3}}-2=0,$$

বা, $a^2+a-2=0$ [$x^{\frac{1}{3}}=a$ ধরিয়া]

বা, $(a-1)(a+2)=0$, $\therefore$ $a=1$ বা -2. $\therefore$ $x^{\frac{1}{3}}=1$ বা -2.

$\therefore$ $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3=(1)^3$ বা $(-2)^3$, $\therefore$ $x=1$ বা -8.

উদা. 36. Solve $5^x+5^{-x}=25\frac{1}{25}$.

এখানে $5^x+\frac{1}{5^x}=25+\frac{1}{25}$, বা, $5^x+\frac{1}{5^x}=5^2+\frac{1}{5^2}$,

বা, $5^x-5^2-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^x}=0$,

বা, $(5^x-5^2)-\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^x}\right)=0$, বা, $(5^x-5^2)-\left(\frac{5^x-5^2}{5^2.5^x}\right)=0$,

বা, $(5^x-5^2)\left(1-\frac{1}{5^2.5^x}\right)=0$,

$\therefore$ $5^x-5^2=0\cdots(1)$, বা, $1-\frac{1}{5^2.5^x}=0\cdots(2)$

এক্ষণে (1) হইতে পাই $5^x=5^2$, $\therefore$ $x=2$;

এবং (2) „ „ $\frac{1}{5^x.5^2}=1$, বা, $\frac{1}{5^x}=5^2=\frac{1}{5^{-2}}$ $\therefore$ $x=-2$.

$\therefore$ $x=2$ বা -2.

উদা. 37. Solve $a^{2x}.a^{y+1}=a^8$, $a^{3y}.a^{3x+5}=a^{20}$.

$\because$ $a^{2x}a^{y+1}=a^8$, $\therefore$ $a^{2x+y+1}=a^8$,

$\therefore$ $2x+y+1=8$, বা $2x+y=7\cdots(1)$

আবার, $\because$ $a^{3y}.a^{3x+5}=a^{20}$, $\therefore$ $a^{3x+3y+5}=a^{20}$,

$\therefore$ $3x+3y+5=20$, বা, $3x+3y=15\cdots(2)$

(1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই $x=2$, $y=3$.

52. করণী সংক্রান্ত সমীকরণ

উদা. 38. Solve $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}=4.$ [C. U. '47]

$$\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}=4,$$

বা, $\sqrt{x+6}=4-\sqrt{x-2},$

বা, $x+6=16+x-2-8\sqrt{x-2}$ [উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া]

বা, $8\sqrt{x-2}=16-2-6=8$, বা, $\sqrt{x-2}=1$, বা, $x-2=1$

$\therefore\ x=3.$

উদা. 39. Solve $\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}=5.$

এখানে comp. & div. করিয়া পাই,

$$\frac{2\sqrt{a^2+x^2}}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{5+1}{5-1},\quad \text{বা,}\quad \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2},$$

বা, $\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}=\dfrac{9}{4}$ [বর্গ করিয়া], বা, $\dfrac{2a^2}{2x^2}=\dfrac{13}{5}$

[comp. and div. করিয়া]

বা, $\dfrac{a^2}{x^2}=\dfrac{13}{5}$ বা, $13x^2=5a^2$, বা, $x^2=\dfrac{5}{13}a^2$, $\therefore\ x=\pm a\sqrt{\tfrac{5}{13}}.$

উদা. 40. Solve $2(x+2)=1+\sqrt{4x^2+9x+14}$ [C. U.]

বা, $2x+4=1+\sqrt{4x^2+9x+14}$

বা, $2x+3=\sqrt{4x^2+9x+14},$

বা, $4x^2+12x+9=4x^2+9x+14$ [বর্গ করিয়া]

বা, $3x=5,\quad \therefore\ x=\frac{5}{3}.$

উদা. 41. Solve $2-\sqrt{11x^2+5x+3}=x.$

বা, $-\sqrt{11x^2+5x+3}=x-2,$

বা, $11x^2+5x+3=x^2-4x+4$ [বর্গ করিয়া]

বা, $10x^2+9x-1=0,$

বা, $10x^2+10x-x-1=0$, বা, $(10x-1)(x+1)=0$,
$\therefore$ $x=\frac{1}{10}$ বা -1.
[উদা. 47এর নীচে 'দ্রষ্টব্য'টি দেখ।]

উদা. 42. Solve $\frac{x-ax}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x}$.

বজ্রগুণন দ্বারা পাই $x^2-ax^2=x$, বা, $x^2(1-a)-x=0$,

বা, $x\{x(1-a)-1\}=0$, $\therefore$ হয় $x=0$, অথবা $x(1-a)-1=0$;

$\therefore$ $x=0$, বা, $\frac{1}{1-a}$.

উদা. 43. Solve $\frac{ax-1}{\sqrt{ax}+1}=4+\frac{\sqrt{ax}-1}{2}$.

$\because$ $ax-1=(\sqrt{ax})^2-(1)^2$,

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই

$$\frac{(\sqrt{ax}+1)(\sqrt{ax}-1)}{\sqrt{ax}+1}=4+\frac{\sqrt{ax}-1}{2},$$

বা, $(\sqrt{ax}-1)=4+\frac{\sqrt{ax}-1}{2}$, বা $(\sqrt{ax}-1)-\frac{\sqrt{ax}-1}{2}=4$,

বা, $\frac{\sqrt{ax}-1}{2}=4$, বা, $\sqrt{ax}-1=8$, বা, $\sqrt{ax}=9$,

$\therefore$ $ax=81$, $\therefore$ $x=\frac{81}{a}$.

উদা. 44. Solve $\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=\frac{2}{\sqrt{x}}$. [C. U.]

বজ্রগুণন করিয়া পাই $x+\sqrt{x^2+4x}=2$,

বা, $\sqrt{x^2+4x}=2-x$, বা $x^2+4x=4-4x+x^2$,

বা, $8x=4$, $\therefore$ $x=\frac{1}{2}$.

উদা. 45. Solve $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}=4+\sqrt{34}$. [C. U. '27]

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া পাই $x^2+9+x^2-9+2\sqrt{x^4-81}$
$$=16+34+8\sqrt{34}$$

বা, $2x^2+2\sqrt{x^4-81}=50+8\sqrt{34}.$

এখন করণীর নিয়ম অনুসারে উভয়পক্ষের মূলদ রাশিদ্বয় সমান,

$\therefore\ 2x^2=50$, বা, $x^2=25$, $\therefore\ x=\pm 5.$

উদা. 46. Solve $\sqrt{3x^2+16}-\sqrt{3x^2-16}=8-4\sqrt{2}\cdots(1)$

[অন্য প্রণালী] $(3x^2+16)-(3x^2-16)=32$

অর্থাৎ $(\sqrt{3x^2+16})^2-(\sqrt{3x^2-16})^2=32\cdots\cdots\cdots(2)$

(2)÷(1) করিয়া পাই $\sqrt{3x^2+16}+\sqrt{3x^2-16}=\dfrac{32}{8-4\sqrt{2}}$

বা, $\sqrt{3x^2+16}+\sqrt{3x^2-16}=\dfrac{32(8+4\sqrt{2})}{(8)^2-(4\sqrt{2})^2}=\dfrac{32(8+4\sqrt{2})}{32}$

$=8+4\sqrt{2}\cdots(3)$

এখন (1)+(3) করিয়া পাই $2\sqrt{3x^2+16}=16$, বা, $\sqrt{3x^2+16}=8$,

$\therefore\ 3x^2+16=64$, বা, $x^2=16$, $\therefore\ x=\pm 4.$

উদা. 47. Solve $4x^2+6x+\sqrt{2x^2+3x+4}=13.$

[W. B. S. F. '53]

বা, $4x^2+6x+8+\sqrt{2x^2+3x+4}=21$ [উভয় পক্ষে 8 যোগ করিয়া]

বা, $2(2x^2+3x+4)+\sqrt{2x^2+3x+4}=21$,

বা, $2a+\sqrt{a}=21$ [মনে কর, $a=2x^2+3x+4$]

বা, $2a-21=-\sqrt{a}$, বা, $4a^2-84a+441=a$ [বর্গ করিয়া]

বা, $4a^2-85a+441=0$, বা, $4a^2-36a-49a+441=0$,

বা, $(a-9)(4a-49)=0$, $\therefore\ a=9$ অথবা $\frac{49}{4}$.

এক্ষণে, যদি $a=9$ হয়, তবে $2x^2+3x+4=9$,

বা, $2x^2+3x-5=0$, বা, $(x-1)(2x+5)=0$, $\therefore\ x=1$ বা $-\frac{5}{2}$.

আবার, $a=\frac{49}{4}$ হইলে $2x^2+3x+4=\frac{49}{4}$ হয়,

বা, $8x^2+12x+16=49$, বা, $8x^2+12x-33=0$,

$$\therefore\ x=\frac{-12\pm\sqrt{144+1056}}{16}=\frac{-12\pm 20\sqrt{3}}{16}=\frac{-3\pm 5\sqrt{3}}{4}.$$

অতএব, $x=1,\ -\frac{5}{2}$, বা $\dfrac{-3\pm 5\sqrt{3}}{4}$.

এখানে দেখা যায় যে, xএর মান 1 ও $-\frac{5}{2}$ ধরিলে সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, কিন্তু $x=\frac{-3\pm5\sqrt{3}}{4}$ ধরিলে উহা সিদ্ধ হয় না। অতএব xএর ঐ মান দুইটি গ্রহণ করা যাইবে না। উহারা অবান্তর বীজ।

$\therefore$ এখানে নির্ণেয় বীজ হইল $x=1$ বা $-\frac{5}{2}$.

[দ্রষ্টব্য : এস্থলে $x=\frac{-3\pm5\sqrt{3}}{4}$কে প্রদত্ত সমীকরণের **অবান্তর বীজ** (extraneous roots) বলে। ঐ বীজ $4x^2+6x-\sqrt{2x^2+3x+4}=13$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে, প্রদত্ত সমীকরণকে নহে।

সাবধান : যে ক্ষেত্রে উভয়পক্ষের বর্গ করিয়া সমীকরণ সমাধান করিতে হয়, সে ক্ষেত্রে প্রাপ্ত সকল বীজ দ্বারা সমীকরণটি হয়ত সিদ্ধ না হইতে পারে। ঐরূপ স্থলে প্রাপ্ত কোন্ বীজ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় তাহা দেখিয়া লইয়া উত্তর লিখিবে। এইরূপ দেখিবার সময় বর্গমূল ধনাত্মক ধরিবে। যে প্রাপ্ত বীজ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না তাহাকে অবান্তর বীজ বলে। উহাকে উত্তরে ধরিবে না—উহা অবান্তর বীজ বলিয়া লিখিয়া দিবে।]

উদা. 48 Solve $\frac{x^2-3x-24}{x^2-9}+\frac{4}{x-3}=1\frac{1}{5}$.

উভয় পক্ষকে $5(x^2-9)$ বা $5(x+3)(x-3)$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$5(x^2-3x-24)+20(x+3)=6(x^2-9) \cdots(1)$$

বা, $5x^2-15x-120+20x+60=6x^2-54$,

বা, $x^2-5x+6=0$, বা, $(x-2)(x-3)=0$, $\therefore$ $x=2$ বা 3.

এখানে কিন্তু দেখা যায় যে, $x=2$ ধরিলে সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, কিন্তু $x=3$ ধরিলে তাহা হয় না। xএর মান 3 ধরিলে আমরা সমীকরণটি হইতে পাই $\frac{-24}{0}+\frac{4}{0}=1\frac{1}{5}$, কিন্তু ইহা অসম্ভব।

$\therefore$ $x=3$ এই সমাধানটি গ্রাহ্য নহে, এখানে 3 হইল অবান্তর বীজ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=2$ হইবে।

[দ্রষ্টব্য : উপরের উদাহরণে সমীকরণের উভয়পক্ষকে $5(x+3)(x-3)$ দ্বারা গুণ করিয়া দুই পক্ষের গুণফল সমান ধরা হইয়াছে, কিন্তু $x-3=0$ হইলে এই প্রক্রিয়াটি অসঙ্গত হইবে।]

বিবিধ সমীকরণের সমাধান

উদা. 49. Solve $x^2+\frac{36}{x^2}=13.$ [C. U. '31]

বা, $x^4+36=13x^2$, বা $x^4-13x^2+36=0,$

বা, $(x^2-9)(x^2-4)=0$, বা, $(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)=0,$

$\therefore \quad x=\pm 3$ অথবা $\pm 2.$

উদা. 50. Solve $x^6-28x^3+27=0.$ [D. B. '31]

বা, $x^6-27x^3-x^3+27=0,$

বা, $x^3(x^3-27)-1(x^3-27)=0$, বা $(x^3-1)(x^3-27)=0,$

বা, $(x-1)(x^2+x+1)(x-3)(x^2+3x+9)=0,$

$\therefore \quad x-1=0\cdots(1)$, $x^2+x+1=0\cdots(2)$, $x-3=0\cdots(3),$

অথবা, $x^2+3x+9=0$ ..(4). এখন (1) হইতে পাই $x=1$;

(2) হইতে $x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$;

(3) হইতে $x=3$; (4) হইতে $x=\frac{-3\pm\sqrt{9-36}}{2}$

$=\frac{-3\pm\sqrt{-27}}{2}=\frac{-3\pm 3\sqrt{-3}}{2}=\frac{3}{2}(-1\pm\sqrt{-3}).$

অতএব, $x=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2},\ 3,\ \frac{3}{2}(-1\pm\sqrt{-3}).$

[দ্রষ্টব্য : উপরের উদাহরণে লব্ধ বীজগুলিতে দেখ $\sqrt{-3}$এর কোন বাস্তব মান বা অস্তিত্ব নাই, কারণ -3এর বর্গমূল নির্ণয় করা যায় না। বীজগণিতে কিন্তু $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$ প্রভৃতি এই জাতীয় রাশি দেখা যায়, সেইজন্য এইরূপ রাশিকে কাল্পনিক বা অবাস্তব (imaginary) রাশি বলা হয়।]

উদা. 51. Solve $(1+x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}$.

[C. U. ; D. B. '46, '51]

উভয় পক্ষের ঘন বা cube করিয়া পাই

$$1+x+1-x+3(1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}\{(1+x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}\}=2,$$

বা, $2+3(1-x^2)^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{3}}=2$ [$\because$ $\{(1+x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}\}=2^{\frac{1}{3}}$ (স্বীকার)]

বা, $3(1-x^2)^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{3}}=0$, $\therefore$ $(1-x^2)^{\frac{1}{3}}=0$, $\therefore$ $1-x^2=0$,

বা, $x^2=1$, $\therefore$ $x=\pm1$.

Exercise 10

Solve :—

1. $5x^2+3=128$
2. $(2x-1)^2=5-4x$.
3. $2x-\frac{3}{x}=\frac{x}{2}$.
4. $\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x+8}{x+4}$. [C. U. '31]
5. $42x^2-41x-20=0$. [C. U. '13]
6. $3x^2-10x+3=0$. [C. U. '33]
7. $4x^2-65x+126=0$. [C. U. '16]
8. $6x^2-11x-10=0$. [C. U. '22]
9. $(17x-8)(x-2)=555$. [C. U. '32]
10. $17x^2+19x=1848$. [C U. '11]
11. $6x^2-91x+323=0$. [C. U. '14]
12. $(x-7)(x-19)=64$. [C. U. '18]
13. $(x+4)(2x-3)=6$. [B. U. '29]
14. $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=4\frac{1}{4}$. [C. U. '31]
15. $x^2-6x+2=0$. [G. U. '48]
16. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=2\frac{1}{6}$. [E. B. S. B. '50]
17. $x^2-2\sqrt{13}x+4=0$. [C. U. '49]

18. $\frac{x+3}{x-3}+6\frac{x-3}{x+3}=5.$ [W. B. S. F. '52]

19. $\frac{3}{x+3}-\frac{x+3}{x-3}+6\frac{6}{7}=0.$ [C. U. '11]

20. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{25}{12}.$ [C. U. '10]

21. $x^2-10x+8=0.$ [C. U. '47]

22. $\frac{12x+17}{3x+1}-\frac{2x+15}{x+7}=3\frac{1}{5}.$ [C. U. '20]

23. $\frac{40}{x-5}+\frac{27}{x}=13.$ [D. B. '26] 24. $x+\frac{1}{x}=6\frac{1}{6}.$

25. $\frac{x-6}{x+2}+\frac{x-10}{x+6}+2=0.$ [C. U. '28]

26. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+13}{x+1}.$

27. $\frac{x+1}{2}+\frac{2}{x+1}=\frac{x+1}{3}+\frac{3}{x+1}-\frac{5}{6}.$ [C. U. '36]

28. $\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+3}{x-3}=\frac{2(x+4)}{x-4}.$

29. $\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2-5\left(\frac{x-a}{x+a}\right)+6=0.$ [P. U.]

30. $1+x=\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-x}}.$ [C. U. '44]

31. $\sqrt{5x-1}=1+\sqrt{5x-2}.$ [C. U.]

32. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+8}=\sqrt{6x+1}$ [C. U. '20 ; D. B. '30]

33. $x^2-2\sqrt{3}x-13=0.$ [C. U. '46]

34. $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}=12.$ 35. $4^x+2^{x+2}=96.$ [D. B. '47]

36. $\sqrt{a+x}+\sqrt{x}=\frac{ma}{\sqrt{a+x}}.$ [P. U.]

37. $2(4^x-3.2^{x-1})+1=0.$

38. $x^{-3}+x^{-\frac{3}{2}}=2$ 39. $(\sqrt{2})^{3x+1}=256.$

40. $\left(\frac{p}{q}\right)^{x-2}=\left(\frac{q}{p}\right)^{2x-1}$. 41. $(\sqrt[3]{36})^{2x+1}=(\sqrt[5]{216})^{x+6}$.

42. $5^{x-2}+5^{1-x}=1\frac{1}{5}$. 43. $2^{x-2}+2^{3-x}=3$. [C. U. '40]

44. $2^{2x-2}=2^{x-3}-\frac{1}{64}$. [C. U. (D. M. H.) '51]

45. $12^{x}+12^{-x}=144\frac{1}{144}$.

46. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=5$. [C. U. '29, '41]

47. $a^{2x-1}=b^{2x-1}$.

48. $4^{x}-3.2^{x+2}+32=0$. [W. B. S. F. '53]

49 $x^{2}+2(b-c)x+c^{2}=2bc$.

50. $\sqrt{2x^{2}+9}+\sqrt{2x^{2}-9}=9+3\sqrt{7}$.

51. $3^{x+y}=3^{2x-y}=\sqrt{27}$. 52. $3.2^{x+1}=8+4^{x}$.

53. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=5$. [C. U. '46]

54. $\sqrt{x}+\sqrt{x-9}=\frac{36}{\sqrt{x-9}}$ [C. U. '50 ; Pat. U. '21]

55. $4^{\frac{x+3}{2}}.8^{\frac{x-3}{3}}=2^{\frac{5x+7}{3}}.16^{\frac{3x-1}{7}}$.

56. $\sqrt{x^{2}+11x+20}-\sqrt{x^{2}+5x-1}=3$. [C. U.]

57. $\sqrt{\frac{x+a}{x-b}}+\frac{a}{x}=\sqrt{\frac{x-b}{x-a}}+\frac{b}{x}$. [M. U.]

58. $\sqrt{2x-9}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x+1}$.

59. (i) $\frac{x-9}{\sqrt{x}+3}=3+\frac{3-\sqrt{x}}{2}$.

(ii) $\left.\begin{aligned}\frac{5^{x}}{5^{y}}&=25\\ \frac{4^{y}}{2^{x}}&=2\end{aligned}\right\}$ [G. U. '54]

60. $5^{x^{2}+x+1}.6^{x^{2}+x+2}=162000$.

61. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$. [P. U. 1891]

62. $4\times 2^{x-1}=8^x$. [D. B. '31]

63. $4^{x+\frac{1}{2}}+4=36(2^{x-2})$. [W. B. S. F. '52]

64. $9(9^{x-1}+3)=28\times 3^x$.

65. $ax^2-bx-c=0$. [C. U. '44]

66. $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$. [D. B. '40, '43]

67. $6(x^4+1)=13x^2$. [D. B. '32]

68. $3x^{\frac{1}{2}}-\frac{8}{x^{\frac{3}{2}}}+\frac{10}{x^{\frac{1}{2}}}=0$. [D. B. '35]

69. $a^x.a^{y+1}=a^7,\ a^{2y}.a^{3x+5}=a^{20}$. [C. U. 1878]

70. $(p+x)^{\frac{2}{3}}+(p-x)^{\frac{2}{3}}=3(p^2-x^2)^{\frac{1}{3}}$.

Solve without assuming any formula :

71. $3x^2+4x=8$. [C. U. '51]

72. $x^2-x=1806$ [C. U. '17] 73. $63x^2-62x=221$.

74. Find the value of x for which $ax^2-(a+1)x+1=0$.

75. Solve $15x^2-11x-31=0$ and find the values of the roots correct to 2 decimal places. [G. U. '54]

দ্বিঘাত সমীকরণ সংক্রান্ত বিবিধ প্রশ্ন
(Problems on Quadratic Equations)

53. দ্বিঘাত সমীকরণ সংক্রান্ত প্রশ্নগুলির সমাধানকালে অনেক সময় দেখা যায় যে, অজ্ঞাত রাশিটির প্রাপ্ত দুইটি মানই প্রশ্নের সর্ত পূরণ করে না। সুতরাং প্রত্যেক ফলটিকে পরীক্ষা করিয়া তবে উত্তররূপে গ্রহণ করিবে।

উদাহরণমালা 12

উদা. 1. Find two consecutive numbers the sum of whose squares is 145. [C. U. '16]

মনে কর, প্রথম সংখ্যা x, সুতরাং উহার পরবর্তী সংখ্যা $x+1$.

$\therefore$ সর্ত অনুসারে পাই $x^2+(x+1)^2=145$,

বা, $x^2+x^2+2x+1=145$, বা, $2x^2+2x-144=0$,

বা, $x^2+x-72=0$, বা, $(x+9)(x-8)=0$, $\therefore$ $x=-9$ বা 8;

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় $=8$ ও 9, অথবা -9 ও -8.

[**দ্রষ্টব্য :** প্রথমটি কেবল পাটীগণিতীয় সমাধান, উভয়ই বীজগণিতীয় সমাধান।]

উদা. 2. Find two consecutive odd numbers whose product is 899. [Pat. U. '24]

মনে কর, $2x-1$ ও $2x+1$ পর পর দুইটি অযুগ্ম সংখ্যা।

$\therefore$ সর্তানুসারে, $(2x-1)(2x+1)=899$, বা, $4x^2-1=899$,

বা, $4x^2=900$, বা, $x^2=225$, $\therefore$ $x=\pm 15$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় $=29$ ও 31 অথবা -31 ও -29.

[**দ্রষ্টব্য :** xএর যে কোন অখণ্ড মানে $2x$ একটি যুগ্ম সংখ্যা, $\therefore$ $2x+1$, বা, $2x-1$ অযুগ্ম সংখ্যা।]

উদা. 3. A man bought a certain number of books for Rs. 20. Had he obtained one more book for the same sum, the average price of each would have been a rupee less. Find the number of books bought.

মনে কর, পুস্তকের সংখ্যা x, সুতরাং প্রত্যেক পুস্তকের গড়মূল্য $\frac{20}{x}$ টাকা, যদি 20 টাকায় $x+1$ সংখ্যক পুস্তক কেনা হইত, তবে প্রত্যেকের গড়মূল্য হইত $\frac{20}{x+1}$ টাকা।

∴ সর্তানুসারে $\frac{20}{x+1}=\frac{20}{x}-1$, বা, $\frac{20}{x+1}=\frac{20-x}{x}$,

বা, $20x=20x+20-x^2-x$, বা, $x^2+x-20=0$,

বা, $(x+5)(x-4)=3$, ∴ $x=-5$ বা 4,

এখানে যেহেতু পুস্তকের সংখ্যা ঋণাত্মক হইতে পারে না, সেইজন্য x-এর মান -5 গ্রাহ্য হইবে না।

∴ নির্ণেয় পুস্তকের সংখ্যা $=4$.

উদা. 4. Divide unity into two parts such that the sum of their cubes is $\frac{7}{16}$. [C. U. '15]

মনে কর, একটি অংশ x, সুতরাং অন্য অংশ $1-x$.

∴ সর্তানুসারে, $(x)^3+(1-x)^3=\frac{7}{16}$,

বা, $x^3+1-3x+3x^2-x^3=\frac{7}{16}$, বা, $3x^2-3x+\frac{9}{16}=0$,

বা, $48x^2-48x+9=0$, বা, $16x^2-16x+3=0$,

বা, $16x^2-12x-4x+3=0$, বা, $(4x-1)(4x-3)=0$,

∴ $x=\frac{1}{4}$ বা $\frac{3}{4}$. ∴ নির্ণেয় অংশদ্বয় $=\frac{1}{4}$ ও $\frac{3}{4}$.

উদা. 5. Divide 50 into two parts such that the sum of their reciprocals may be $\frac{1}{12}$. [C. U. '13]

মনে কর, প্রথম অংশ x, সুতরাং দ্বিতীয় অংশ $=50-x$.

∴ সর্তানুসারে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{50-x}=\frac{1}{12}$, বা, $\frac{50-x+x}{x(50-x)}=\frac{1}{12}$,

বা, $\frac{50}{50x-x^2}=\frac{1}{12}$, বা, $600=50x-x^2$,

বা, $x^2-50x+600=0$, বা, $x^2-30x-20x+600=0$,

বা $(x-20)(x-30)=0$, ∴ $x=20$ বা 30.

∴ নির্ণেয় অংশদ্বয় $=20$ ও 30.

[দ্রষ্টব্য : দুইটি সংখ্যার গুণফল 1 হইলে একটিকে অপরটির অন্যোন্যক (reciprocal) বলে। যথা, $\frac{3}{4}$এর অন্যোন্যক $\frac{4}{3}$, 5এর অন্যোন্যক $\frac{1}{5}$ ইত্যাদি।]

উদা. 6. The difference between a proper fraction and its reciprocal is $\frac{9}{20}$. Find the fraction. [C. U. '41 ; D. B. '29]

মনে কর, প্রকৃত ভগ্নাংশটি x, সুতরাং উহার অন্যোন্যক $=\frac{1}{x}$.

$\because$ x একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ, $\therefore$ উহার লব অপেক্ষা হর বৃহত্তর,

সুতরাং $\frac{1}{x}$ এর হর অপেক্ষা লব বৃহত্তর হইবে। $\therefore$ $\frac{1}{x}>x$.

. সর্তানুসারে, $\frac{1}{x}-x=\frac{9}{20}$, বা, $20-20x^2=9x$,

বা, $20x^2+9x-20=0$, বা, $20x^2+25x-16x-20=0$,

বা, $(4x+5)(5x-4)=0$, $x=-\frac{5}{4}$ বা $\frac{4}{5}$.

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\frac{4}{5}$; $-\frac{5}{4}$ প্রকৃত ভগ্নাংশ নহে বলিয়া উহা গ্রাহ্য হইল না।

উদা. 7. The sum of two numbers is 45 and the mean proportional between them is 18 ; find them. [B. U. '29]

মনে কর, প্রথম সংখ্যা x, সুতরাং দ্বিতীয় সংখ্যা $=45-x$.

$\because$ উহাদের মধ্য সমানুপাতী $=18$, $\therefore$ $x(45-x)=18^2$,

বা, $45x-x^2=324$, বা, $-x^2+45x-324=0$.

বা, $x^2-45x+324=0$, বা, $(x-36)(x-9)=0$, $\therefore$ $x=9, 36$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় $=9$ ও 36.

উদা. 8. A certain number exceeds its reciprocal by 1. How many such numbers are there ? Find them. [C.U. '34]

মনে কর, সংখ্যাটি x, সুতরাং উহার অন্যোন্যক $\frac{1}{x}$.

$\therefore$ সর্তানুসারে $x-\frac{1}{x}=1$, বা, $x^2-1=x$, বা, $x^2-x-1=0$,

$$\therefore \quad x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times-1}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

$\therefore$ উদ্দিষ্ট সংখ্যা দুইটি হইবে ; একটি $=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, অন্যটি $=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

উদা. 9. Show that the product of any four consecutive numbers increased by unity is a perfect square.

মনে কর, x, $x+1$, $x+2$ এবং $x+3$ পরপর চারিটি সংখ্যা। উহাদের গুণফলের সহিত এক যোগ করিয়া পাই

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1$$
$$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1=a(a+2)+1 \quad [x^2+3x=a \text{ ধরিয়া}]$$
$$=a^2+2a+1=(a+1)^2=(x^2+3x+1)^2, \text{ ইহা একটি পূর্ণবর্গ।}$$

উদা. 10. The hypotenuse of a right-angled triangle is 20 inches. If the difference between its other two sides be 4 inches, find the sides. [G. U. '49]

মনে কর, ক্ষুদ্রতর বাহু $=x$ ইঞ্চি, সুতরাং বৃহত্তর বাহুটি $=x+4$ ইঞ্চি।

$\therefore \quad x^2+(x+4)^2=20^2$, বা, $x^2+x^2+8x+16=400$,

বা, $2x^2+8x-384=0$, বা, $x^2+4x-192=0$,

বা, $(x+16)(x-12)=0$, $\therefore \quad x=-16$ বা 12.

$\therefore$ ক্ষুদ্রতর বাহুটি $=12$ ইঞ্চি এবং বৃহত্তর বাহুটি $=(12+4)$ ই. $=16$ ই.।

উদা. 11. The area of a rectangular plot of land fenced all round is 2000 sq. yards and the total length of fencing is 180 yds. Obtain a quadratic equation to determine the length of the plot. [C. U. '33]

2 (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ) = পরিসীমা = বেড়ার মোট মাপ = 180 গজ।

$\therefore$ দৈর্ঘ্য + প্রস্থ = 90 গজ। মনে কর, দৈর্ঘ্য x গজ, সুতরাং প্রস্থ $=(90-x)$ গজ। $\therefore$ প্রথম সর্ত হইতে পাই $x(90-x)=2000$,

বা, $x^2-90x+2000=0$, ইহাই উদ্দিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ।

ইহার সমাধান করিলে পাই $x=40$ বা 50.

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য = 50 গজ [$\because$ দৈর্ঘ্য > প্রস্থ]

উদা. 12. A cyclist travels 84 miles and finds that he could have made the journey in 5 hours less if he had travelled 5 miles an hour faster. At what rate did he travel? [G. U. '50]

মনে কর, লোকটির গতি ঘণ্টায় x মাইল। $\therefore$ 84 মা. যাইতে সময় লাগে $\frac{84}{x}$ ঘণ্টা। গতি ঘণ্টায় $(x+5)$ মা. হইলে, 84 মা. যাইতে লাগে $\frac{84}{x+5}$ ঘণ্টা।

$\therefore\ \frac{84}{x}-\frac{84}{x+5}=5$, বা, $\frac{84x+420-84x}{x(x+5)}=5$, বা, $\frac{420}{x^2+5x}=5$,

বা, $5(x^2+5x)=420$, বা, $x^2+5x=84$, বা, $x^2+5x-84=0$,

বা, $(x+12)(x-7)=0$, $\therefore\ x=-12$ বা 7.

$\because$ গতি ঋণাত্মক হইতে পারে না, $\therefore$ নির্ণেয় গতি ঘণ্টায় 7 মাইল।

উদা. 13. The perpendicular drawn from the centre of a circle to a certain chord is 3 inches less than half the chord. If the radius be 15 inches, find the length of the chord.

বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কোন জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। মনে কর, AB জ্যা-এর উপর কেন্দ্র O হইতে OD লম্ব টানা হইয়াছে। এক্ষণে OAD একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

মনে কর, $OD=x$ ইঞ্চি, সুতরাং $AD=x+3$ ইঞ্চি, এবং অতিভুজ $OA=15$ ই., $\therefore\ x^2+(x+3)^2=15^2$, বা, $2x^2+6x+9=225$, বা, $2x^2+6x-216=0$, বা $x^2+3x-108=0$, বা $(x+12)(x-9)=0$, $\therefore\ x=-12$ বা 9. $\because$ লম্বের মাপ ঋণাত্মক হইতে পারে না, $\therefore$ লম্বটি $=9$ই.।

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $=2(x+3)$ ই. $=2(9+3)$ ই. $=24$ ইঞ্চি।

উদা. 14. A boatman can row 7 miles down a river and back in $4\frac{2}{3}$ hours. If the river runs at 2 miles an hour, find the rate of the pull in still water. [D. B. '47]

মনে কর, দাঁড়ের বেগ ঘণ্টায় x মাইল। $\therefore$ স্রোতের অনুকূলে নৌকার গতি ঘণ্টায় $x+2$ মাইল এবং প্রতিকূলে ঘণ্টায় $x-2$ মাইল।

$\therefore\ \frac{7}{x+2}+\frac{7}{x-2}=4\frac{2}{3}$, বা, $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{2}{3}$

[উভয়পক্ষকে 7 দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $\frac{x-2+x+2}{x^2-4}=\frac{2}{3}$ বা, $x^2-3x-4=0$,

বা, $(x-4)(x+1)=0$, $\therefore$ $x=4$ বা -1.

$\because$ দাঁড়ের বেগ -1 হইতে পারে না,

$\therefore$ নির্ণেয় দাঁড়ের বেগ = ঘণ্টায় 4 মাইল।

উদা. 15. A regiment of soldiers, when formed into a solid square, has 16 men fewer in the front than when formed into a hollow square 4 deep. Find the numbers of soldiers. [D. B. '40]

মনে কর, শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজাইবার সময় সম্মুখ সারির সৈন্যসংখ্যা $=x$, সুতরাং মোট সৈন্যসংখ্যা $=x^2-(x-4\times 2)^2=x^2-(x-8)^2$.

আবার, নিরেট বর্গাকারে সাজাইবার সময় সম্মুখ সারির সৈন্যসংখ্যা $= x-16$. $\therefore$ মোট সৈন্যসংখ্যা $=(x-16)^2$.

$\therefore$ সর্তানুসারে $(x-16)^2=x^2-(x-8)^2$,

বা, $x^2-32x+256=x^2-x^2+16x-64$,

বা, $x^2-48x+320=0$, বা, $(x-40)(x-8)=0$,

$\therefore$ $x=40$ বা 8.

এখানে xএর মান 8 গ্রাহ্য হইতে পারে না, কারণ 8 অপেক্ষা 16 জন কম সম্মুখ সারির লোক হওয়া সম্ভব হইবে না।

$\therefore$ নির্ণেয় সৈন্যসংখ্যা $=(x-16)^2=(40-16)^2=24^2=576$.

উদা. 16. What is the price of eggs per dozen, if one more for 6 annas reduces the price by one anna per dozen ? [D. B. '39, '41, '46]

মনে কর, x সংখ্যক ডিমের মূল্য $=6$ আনা,

$\therefore$ 12টি " " $=\dfrac{72}{x}$ আনা…(1)

এক্ষণে, যদি $x+1$ সংখ্যক ডিমের মূল্য 6 আনা হয়, তবে

12টি " " হইবে $\dfrac{72}{x+1}$ আনা…(2)

$\therefore$ সর্তানুসারে $\dfrac{72}{x}-\dfrac{72}{x+1}=1$ [$\because$ ২য় মূল্য ১ম মূল্য অপেক্ষা 1 আনা কম]

বা, $\frac{72x+72-72x}{x(x+1)}=1$ বা, $x^2+x=72$, বা, $x^2+x-72=0$,

বা, $(x+9)(x-8)=0$, $\therefore$ $x=-9$ বা 8.

$\because$ ডিমের সংখ্যা ঋণাত্মক (-9) হইতে পারে না, $\therefore$ ডিমের সংখ্যা $=8$.

এক্ষণে (1) হইতে এক ডজন ডিমের মূল্য $=\frac{72}{8}$ আ. $=9$ আনা।

উদা. 17. Find a fraction which assumes twice or thrice its original value when 2 or 3 respectively is added to both its numerator and denominator. [D. B. '49]

মনে কর, ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$. এক্ষণে প্রথম সর্ত অনুসারে $\frac{x+2}{y+2}=\frac{2x}{y}$,

ব, $xy+2y=2xy+4x$, বা, $2y-4x=xy$,

বা, $\frac{2y}{xy}-\frac{4x}{xy}=1$, বা, $\frac{2}{x}-\frac{4}{y}=1\cdots(1)$

আবার দ্বিতীয় সর্তানুসারে পাই $\frac{x+3}{y+3}=\frac{3x}{y}$, বা, $3y-9x=2xy$,

বা, $\frac{3}{x}-\frac{9}{y}=2\cdots(2)$. এখন $(1)\times3$ এবং $(2)\times2$ করিয়া পাই

$$\frac{6}{x}-\frac{12}{y}=3$$

এবং $$\frac{6}{x}-\frac{18}{y}=4$$

$\therefore$ (বিয়োগ) $\frac{6}{y}=-1$, $\therefore$ $y=-6$.

(1) হইতে yএর মান বসাইয়া পাই $\frac{2}{x}+\frac{4}{6}=1$, বা, $\frac{2}{x}=\frac{1}{3}$, $\therefore$ $x=6$.

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\frac{6}{-6}$.

[দ্রষ্টব্য : এখানে $\frac{6}{-6}$ই উত্তর রাখিতে হইবে, $\frac{1}{-1}$ বা, -1 উত্তর দেওয়া চলিবে না, কারণ তাহা হইলে সর্তগুলি সম্ভব হইবে না।]

উদা. 18. The product of two numbers is 24. If the sum of the squares of the two numbers be added to the sum of the numbers, the result is 62. What are the numbers ?

[E. B. S. B. '53]

মনে কর, সংখ্যাদ্বয় x ও y.

$\therefore \quad xy=24 \cdots(1)$ এবং $x^2+y^2+x+y=62 \cdots(2)$.

(2) হইতে পাই $(x+y)^2-2xy+x+y=62$,

বা, $(x+y)^2-2\times 24+(x+y)=62$,

বা, $(x+y)^2+(x+y)-110=0$,

বা, $a^2+a-110=0$ [$x+y=a$ ধরিয়া],

বা, $(a+11)(a-10)=0$, $\therefore \quad a=-11$ বা 10.

(i) যদি $a=-11$ হয়, তবে $x+y=-11$.

$\therefore \quad (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(-11)^2-4\times 24=25$

$\therefore \quad x-y=\pm 5$.

এক্ষণে, $x+y=-11$

$x-y=5$ [$x-y=5$ ধরিয়া]

$\therefore \quad 2x=-6$, $\therefore \ x=-3$, সুতরাং $y=-8$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় $=-3, -8$.

[$x-y=-5$ ধরিলেও ঐ দুইটি সংখ্যাই পাওয়া যায়।]

(ii) আবার, যদি $a=10$ হয়, তবে $x+y=10$, $\therefore \quad y=10-x$

$\because \quad xy=24$, $\therefore \quad x(10-x)=24$,

বা, $x^2-10x+24=0$, বা, $(x-4)(x-6)=0$,

$\therefore \quad x=4$ বা 6 ; সুতরাং $y=6$ বা 4.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় $=4, 6$.

অতএব, (i) ও (ii) হইতে পাই,

নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় $=-3$ ও -8, অথবা 4 ও 6.

[(ii)এর সমাধানও (i)এর মত করা যায়। এখানে দুইটিতে দুই রকমের সমাধান দেখান হইল]

Exercise 11

1. Find a number such that its square added to its cube is 16 times the next number. [A. U. '16]

2. The sum of two numbers is 2 and the sum of their reciprocals is $2\frac{1}{4}$. Find the numbers. [C.U. '35]

3. Find two consecutive odd numbers whose product is 35.

4. Find two consecutive numbers such that the difference of their reciprocals is $\frac{1}{110}$.

5. What number when added to 30 will be less than its square by 12 ? [E. B. S. B. '50]

6. The sum of the squares of two consecutive odd integers is 290 ; find the integers.

7. A number is greater than its square root by 110. Find it.

8. The sum of the squares of two consecutive even numbers is 100 Find the numbers. [A. U. '24]

9 In a right-angled triangle the sum of the two sides containing the right angle is 23″, and the hypotenuse is 17″. Find the sides containing the right angle. [G. U. '51]

10. The hypotenuse of a right-angled triangle is 13 inches. Find the length of each of the remaining two sides if their sum is 17 inches. [C. U. '45]

11. A and B can do a piece of work in 72 mins., but B alone takes 1 hr. more than A to do it. In what time can each do it ?

12. Find the price of eggs per dozen when two more eggs for a shilling would reduce the price by one penny per dozen. [E. B. S. B. '51]

13. A man bought a certain number of goats for Rs.420 ; had he obtained one more for the same sum, the price of each would have been Re. 1 less. Find the number of goats bought.

14. A number is less than twice the product of its two digits by 8; if the digit in the tens' place is greater than the digit in the units' place by 1, find the number.

15. A man takes one hour less to ride 24 miles if he increases his speed by 2 miles per hour. Find his speed per hour.

16. The perpendicular from the centre of a circle to a chord is less than half the chord by 1″; if the radius be 5″, find the length of the chord.

17. The area of a rectangular field is 260 sq. ft. If its length be diminished by 5 ft. and breadth increased by 2 ft., it becomes a square field. Find its length and breadth.

18. A boatman can row 9 miles down the river but 3 miles up stream in a certain time. If the speed of the current be 2 miles per hour, find the speed of the boat in still water.

19. Find two consecutive positive numbers the sum of whose squares is 761. [G. U. '52]

20. The hypotenuse of a right-angled triangle is 25″. If the sum of the three sides be 56″, find the smallest side of the triangle.

21. The circumference of the fore-wheel of a carriage is 4 metres less than that of the hind-wheel and it makes 10 revolutions more than the latter in 240 metres. Find the circumference of each wheel.

22. A company of soldiers, when formed into a solid square, has 12 men fewer in the front than when formed into a hollow square 3 deep. Find the number of soldiers.

Graph (লেখ)

তোমরা পূর্ব শ্রেণীতে লেখ-অঙ্কন প্রণালী শিখিয়াছ।

54. লেখ সম্বন্ধে কতিপয় জ্ঞাতব্য বিষয়ঃ—

1. একঘাত-বিশিষ্ট সমীকরণের অর্থাৎ সরল সমীকরণের (simple equation) লেখ **সরল রেখা** হয়।

2. কোন দ্বিঘাত সমীকরণকে যদি দুইটি সরল সমীকরণে বিশ্লেষণ করা যায়, তাহা হইলে প্রদত্ত সমীকরণটির লেখ **দুইটি সরল রেখা** হইবে। যথা, (i) $x^2-x-6=0$, বা $(x-3)(x+2)=0$এর লেখ হইবে $x-3=0$ এবং $x+2=0$এর লেখদ্বয়। (ii) $x^2=9y^2$, বা $x^2-9y^2=0$, বা $(x+3y)(x-3y)=0$এর লেখ হইবে $x+3y=0$ ও $x-3y=0$ এই সমীকরণ দুইটির লেখদ্বয়।

3. দ্বিঘাত সমীকরণে x^2 ও y^2এর সহগ সমান ও ধনাত্মক হইলে এবং xy-ঘটিত কোন পদ না থাকিলে সমীকরণটির লেখ একটি **বৃত্ত** (circle) হইবে। এইরূপ সমীকরণের আকার তিন প্রকার হইতে পারে। যথা,—

(i) $x^2+y^2=a^2$ (ii) $(x+b)^2+(y+c)^2=a^2$

(iii) $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

যথা :—(i) $x^2+y^2=16$ (ii) $(x+2)^2+(y-3)^2=9$

(iii) $x^2+y^2+12x+18y+92=0$.

4. দ্বিঘাত সমীকরণে x ও yএর মধ্যে একটি দ্বিঘাত ও অপরটি একঘাত হইলে এবং xy-যুক্ত কোন পদ না থাকিলে সমীকরণটির লেখ **অধিবৃত্ত** (Parabola) হইবে। এইরূপ সমীকরণের আকার $y=mx^2$ বা $mx=y^2$ হইয়া থাকে। $y=ax^2+bx+c$ বা $x=ay^2+by+c$ এই আকারের সমীকরণের লেখ অধিবৃত্ত হইবে, যদি $a=0$ না হয়। যথা—

(i) $4y=x^2$, (ii) $x=y^2$, (iii) $y=x^2+2x+1$.

5. $4x+2, x^2, x^2-5x+6$ প্রভৃতি **অপেক্ষক** (**function**)এর লেখ যাহা হইবে যথাক্রমে $y=4x+2,\ y=x^2$ এবং $y=x^2-5x+6$ সমীকরণের লেখও তাহাই হইবে। অতএব, এইরূপ কোন অপেক্ষকের লেখ আঁকিতে হইলে $y=$ঐ অপেক্ষকটি লিখিয়া ঐ সমীকরণের লেখ আঁকিবে।

6. কোন দ্বিঘাত সমীকরণের x^2 ও y^2এর সহগ অসমান ও ধনাত্মক হইলে, উহার লেখ **উপবৃত্ত** (**Ellipse**) হইবে। এই সমীকরণের সাধারণ আকার হয় $ax^2+by^2=c^2$ যথা, $4x^2+9y^2=25$

7. কোন দ্বিঘাত সমীকরণের x^2 ও y^2এর সহগ বিপরীত চিহ্নযুক্ত (একটি ধনাত্মক, অন্যটি ঋণাত্মক) হইলে, উহার লেখ **পরাবৃত্ত** (**Hyperbola**) হইবে। উহার সাধারণ আকার হয় $ax^2-by^2=c^2$.

যথা, $9x^2-25y^2=225$.

8. $xy=a$, বা $xy+ax+by=c$ এইরূপ আকারের সমীকরণের লেখ একটি বিশেষ পরাবৃত্ত, ইহাকে **সম-পরাবৃত্ত** (**Rectangular Hyperbola**) বলে। যথা, $xy=8$. মূলবিন্দু ইহার কেন্দ্র এবং অক্ষদ্বয় ইহার মূল অক্ষদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

9. লেখ অঙ্কিত করিয়া কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ নির্ণয় (অর্থাৎ সমাধান) করিতে হইলে, উহাকে দুইটি সমীকরণে প্রকাশ করিয়া প্রত্যেকটির লেখ আঁকিতে হইবে। ঐ লেখ দুইটির ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজদ্বয়ই দুইটি বীজ হইবে। যথা, $x^2-7x+12=0$এর সমাধান করিবার জন্য নিম্নের যে কোন উপায় অবলম্বন করা যায়। যথা, (i) $y=x^2-7x+12,\ y=0$ ধরা যায়; অথবা (ii) প্রদত্ত সমীকরণকে $x^2=7x-12$ লিখিয়া $y=x^2$ ও $y=7x-12$ ধরা যায়। এখন (i) বা (ii)এর সমীকরণ দুইটির লেখ আঁকিলে, লেখদ্বয়ের ছেদবিন্দু দুইটির ভুজ দুইটিই প্রদত্ত সমীকরণের বীজ অর্থাৎ xএর মান হইবে।

10. লেখ অঙ্কনের সময় অক্ষদ্বয়, মূলবিন্দু এবং দৈর্ঘ্য একক কি ধরিয়াছ তাহা লিখিতে হয়। প্রদত্ত সমাধানগুলিতে সর্বত্র এগুলি লেখা না থাকিলেও তোমরা উত্তর করিবার সময় ঐগুলি লিখিতে যেন ভুলিও না।

55. বিবিধ লেখ অঙ্কন ও লেখ সাহায্যে সমীকরণ সমাধান

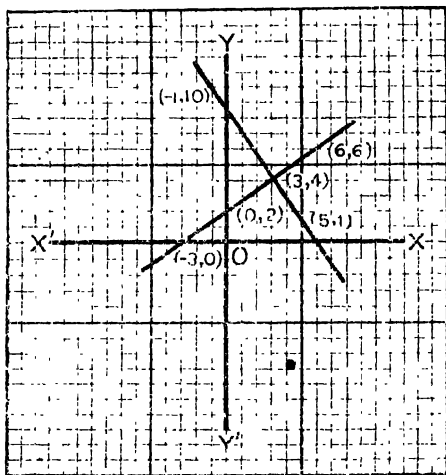
উদাহরণমালা 14

উদা. 1. Solve graphically $3x=17-2y$ and $3y=2x+6$.
[A. U. '27]

$3x=17-2y\cdots(1)$, বা, $2y=17-3x$, $\therefore\ y=\frac{17-3x}{2}$, ইহা হইতে

পাই

x	-1	3	5
y	10	4	1

$3y=2x+6\cdots(2)$, বা, $y=\frac{2x+6}{3}$; ইহা হইতে

x	0	-3	6
y	2	0	6

(চিত্র নং ১)

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখ দুইটি আঁকা হইল। উহারা যে বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহার স্থানাঙ্ক (3, 4) দেখা গেল।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=3$, $y=4$.

উদা. 2. Solve graphically $\frac{8-x}{2}=\frac{x-3}{3}$.

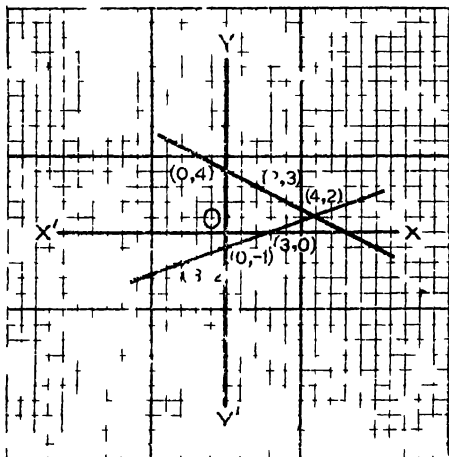
মনে কর, $y=\frac{8-x}{2}$, সুতরাং $y=\frac{x-3}{3}$ হইল।

এখন $y=\frac{8-x}{2}$ হইতে

x	0	2	4
y	4	3	2

এবং $y=\frac{x-3}{3}$ হইতে

x	0	3	−3
y	−1	0	−2

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া সমীকরণ দুইটির লেখ আঁকা হইল। উহারা যে বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহার স্থানাঙ্ক (6, 1) [চিত্র নং ২ দেখ] ∴ নির্ণেয় সমাধান $x=6$

(চিত্র নং ২)

উদা. 3. Solve graphically $x-3=2$

এখানে $x-3$ এবং 2 এই রাশিদ্বয়ের লেখ দুইটির ছেদবিন্দুর ভুজটি নির্ণেয় বীজ হইবে।

$y=x-3$ এবং $y=2$ এই সমীকরণদ্বয়ের লেখ দুইটিই ঐ রাশিদ্বয়ের লেখ হইবে।

$y=x-3$ হইতে পাই

x	2	3	5
y	-1	0	2

এবং $y=2$ „

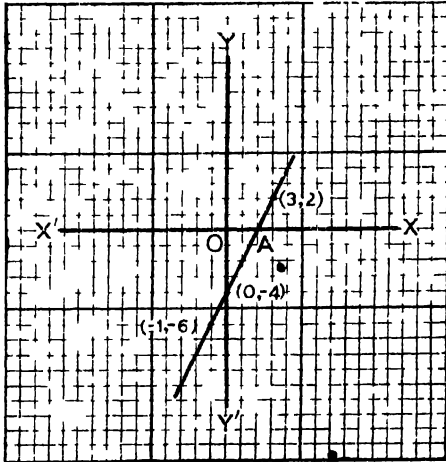
x	0	1	-3
y	2	2	2

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখ দুইটি অঙ্কিত করা হইল। এখানে দেখা যায় লেখ দুইটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (5, 2), সুতরাং ঐ বিন্দুর ভুজ $=5$.

অতএব, নির্ণেয় সমাধান $x=5$.

উদা. 4. Draw the graph of $y-2x+4=0$ and find from it the solution of the equation $2x-4=0$. [D. B. 1929]

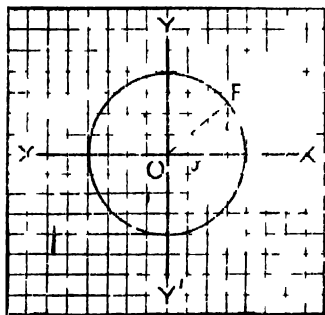
$y-2x+4=0$, $\therefore y=2x-4 \cdots$(A) ; ইহা হইতে

x	0	-1	3
y	-4	-6	2

(চিত্র নং ৩)

লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখটি আঁকা হইল [চিত্র নং ৩]। এখন ঐ লেখ হইতে $2x-4=0$ সমীকরণটি সমাধান করিতে হইলে লেখটি x-অক্ষকে যে A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, তাহার

ভুজ (বা x-axis বরাবর মাপ) দেখিতে হইবে। কারণ, সেখানে $y=0$ সুতরাং $0=2x-4$ হইবে, সমীকরণ-(A) দেখ।

এখানে উক্ত দৈর্ঘ্য $=2$ একক। $\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=2$.

উদা. 5. Draw the graph of $x^2+y^2=16$.

[চিত্র নং ৪]

প্রদত্ত সমীকরণকে $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{16}=4$ এই আকারে লেখা যায়। মনে কর, XOX' ও YOY' অক্ষদ্বয় পরস্পর O মূলবিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। মনে কর, P এমন একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক (x, y) এখন মূলবিন্দু O হইতে Pএর দূরত্ব OP, সুতরাং $OP^2=x^2+y^2$,

$\therefore$ $OP=\sqrt{x^2+y^2}$.

$\because$ এখানে $\sqrt{x^2+y^2}=4$ (ধ্রুবক),

$\therefore$ বুঝা গেল যে, মূলবিন্দু O হইতে P-এর দূরত্ব সর্বদা 4 এককের সমান। অতএব, P-এর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত। $\therefore$ Oকে কেন্দ্র করিয়া এবং 4 একক ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট লেখ হইবে। এখানে লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখটি অঙ্কিত করা হইল।

[**অন্য প্রণালী**। $\because$ $x^2+y^2=16$, $\therefore$ $y=\pm\sqrt{16-x^2}$, এক্ষণে এই সমীকরণ হইতে লেখস্থিত বিভিন্ন বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিয়া এবং ঐ বিন্দুগুলিকে ছক কাগজে স্থাপন করিয়া লেখটি অঙ্কিত করা যায়।]

উদা. 6. Draw the graphs of $x^2+y^2=16$ and $x+y=2$, and measure the length of the chord of intersection. [C. U. '13]

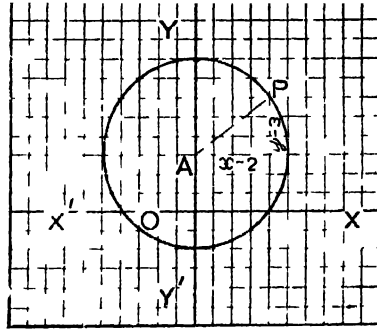
[*Hints* : প্রথম সমীকরণের লেখ একটি বৃত্ত (উপরের উদা. 5 দেখ)। $x+y=2$এর লেখ একটি সরল রেখা। (1, 1), (5, -3), (-4, 6) বিন্দুগুলি দিয়া অঙ্কিত সরল রেখাই উহার লেখ। লেখদ্বয় অঙ্কিত কর। এখন লেখ দুইটি পরস্পর যেন A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। Oকে কেন্দ্র করিয়া

AB ব্যাসার্ধ লইয়া OX হইতে OP কাটিয়া লও। এখন OP দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। এখানে নির্ণেয় দৈর্ঘ্য = 7·5 একক।]

উদা 7. Draw the graph of $(x-2)^2+(y-3)^2=25$.

প্রদত্ত সমীকরণটি হইতে পাই $\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{25}=5$.

প্রথমে (2, 3) স্থানাঙ্কবিশিষ্ট A বিন্দু স্থাপন কর। মনে কর, P উদ্দিষ্ট লেখর উপর একটি বিন্দু এবং উহার স্থানাঙ্ক (x,y). $\therefore$ $AP^2=(x-2)^2+(y-3)^2$, $\therefore$ $AP=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=5$ (ধ্রুবক)। অতএব বুঝা গেল যে, P বিন্দু ঐ নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সর্বদা সমদূরবর্তী অর্থাৎ 5 দৈর্ঘ্য একক দূরবর্তী।

$\therefore$ A (2, 3) বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া 5 একক ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট লেখ। এখানে লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখটি আঁকা হইল।

[চিত্র নং ৫]

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে লক্ষ্য কর যে, প্রদত্ত সমীকরণে $(x-2)$, $(y-3)$ আছে বলিয়া A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 3) অর্থাৎ −2 ও −3এর বিপরীত চিহ্নযুক্ত ধরা হইল। এইরূপে যদি সমীকরণ $(x+3)^2+(y-4)^2=36$ হইত, তবে A বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইত (−3, 4) এবং ইহাকে কেন্দ্র করিয়া 6 দৈর্ঘ্য একক ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় লেখ হইত।]

উদা. 8. Draw the graph of $x^2+y^2+12x+18y+92=0$

$$x^2+y^2+12x+18y+92=0,$$

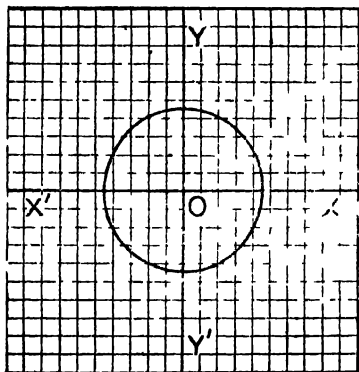
বা, $(x^2+12x+36)+(y^2+18y+81)-25=0$,

বা, $(x+6)^2+(y+9)^2=25=5^2$.

$\therefore$ সমীকরণটির লেখ একটি বৃত্ত যাহার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (−6, −9) এবং ব্যাসার্ধ = 5 দৈর্ঘ্য একক। লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া বৃত্তটি আঁক।

উদা. 9. Draw the graph of $x^2+y^2=21$.

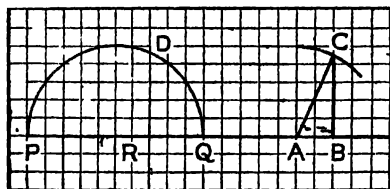
$x^2+y^2=21$, বা, $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{21}$.

অতএব সমীকরণটির লেখ একটি বৃত্ত, যাহার কেন্দ্র মূলবিন্দু O এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{21}$ দৈর্ঘ্য একক।

[চিত্র নং ৬]

এখন $\sqrt{21}$এর মান নির্ণয় করিয়া লেখ আঁকিতে হইবে। ইহা দুইভাবে করা যায়। যথা—

(i) $21=25-4=5^2-2^2$, সুতরাং একটি সমকোণী ত্রিভুজ আঁক যাহার অতিভুজ AC = 5 একক এবং ভূমি AB = 2 একক, উহার BC বাহুর মাপই $\sqrt{21}$ হইবে।

কারণ, $BC^2=AC^2-AB^2=5^2-2^2=21$.

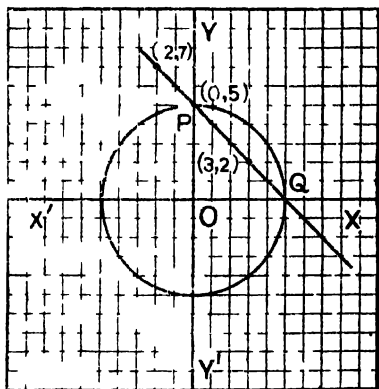
(ii) $21=7\times3$, 7 ও 3এর যোগফল 10 একক দীর্ঘ PQ রেখা লও। উহার PR = 7 দৈর্ঘ্য একক এবং RQ = 3 দৈর্ঘ্য একক কর। PQকে ব্যাস করিয়া অর্ধবৃত্ত আঁক। PQএর উপর RD লম্ব টান, উহা যেন অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন RD $=\sqrt{21}$ হইল। এক্ষণে মূলবিন্দু Oকে কেন্দ্র

[চিত্র নং ৬ক]

করিয়া BC বা RDএর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহাই উদ্দিষ্ট লেখ।

উদা. 10. Draw the graphs of $x^2+y^2=25$ and $\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$, and find the co-ordinates of their points of intersection graphically. [C. U. '39, Sup., '32]

$$x^2+y^2=25, \text{ বা, } \sqrt{x^2+y^2}=5.$$

$\sqrt{x^2+y^2}$ দ্বারা বুঝায় মূলবিন্দু O হইতে (x, y) স্থানাঙ্কবিশিষ্ট P বিন্দুর দূরত্ব। অতএব, $\sqrt{x^2+y^2}=5$ (ধ্রুবক) বলিয়া P বিন্দু O হইতে সমদূরবর্তী। সুতরাং উহার সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত। এখন মনে কর, XOX' ও YOY' অক্ষদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরা হইল। Oকে কেন্দ্র করিয়া 5 একক দীর্ঘ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁকা হইল। উহাই প্রথম সমীকরণের লেখ হইল।

[চিত্র নং ৭]

আবার, $\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$, বা $x+y=5$, ইহা হইতে

x	3	−2	0
y	2	7	5

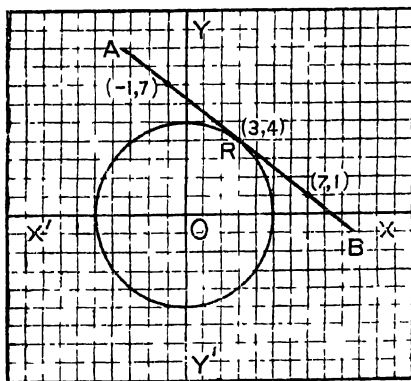
(3 2), (−2, 7), (0, 5) বিন্দুগুলি দিয়া অঙ্কিত সরলরেখাই দ্বিতীয় সমীকরণের লেখ হইল। লেখদ্বয় পরস্পর P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। লেখ হইতে দেখা যায় Pএর স্থানাঙ্ক (0, 5) এবং Qএর স্থানাঙ্ক (5, 0).

উদা. 11. Draw the graph of $x^2+y^2=25$ and show that $3x+4y=25$ touches it at (3, 4). [C. U. '11; E. B. S. B. '50]

প্রথম সমীকরণের লেখ একটি বৃত্ত, উদা. 5এর মত উহা আঁক।

$3x+4y=25$, ইহা হইতে

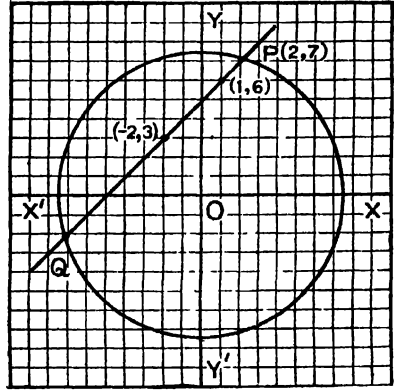
x	3	7	-1
y	4	1	7

; (3, 4), (7, 1), (−1, 7) বিন্দুগুলি দিয়া অঙ্কিত এবং দুই দিকে বিস্তৃত AB সরল রেখাটি এই দ্বিতীয়

[চিত্র নং ৮]

সমীকরণের লেখ। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক লইয়া লেখ দুইটি আঁকা হইল। এখানে সরল রেখাটি বৃত্তটির সহিত কেবলমাত্র R বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে, অন্য কোন বিন্দুতে বৃত্তকে ছেদ করে নাই। সুতরাং উহা বৃত্তকে R বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে এবং ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 4),

[**জ্যামিতিক প্রমাণঃ** $\because$ দুইটি সমীকরণই (3, 4) স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ হয়, $\therefore$ উভয় লেখই (3, 4) বিন্দুতে মিলিয়াছে। এখন RO হইতে $RC=3$ দৈর্ঘ্য একক এবং RA হইতে $RD=4$ দৈর্ঘ্য একক কাটিয়া লইলাম। মাপিয়া দেখিলাম CDর দৈর্ঘ্য 5 একক হইয়াছে। $\because$ $RC^2+RD^2=3^2+4^2=25=5^2=CD^2$, $\therefore$ $\angle R$ সমকোণ। অতএব AB রেখা বৃত্তের OR ব্যাসার্ধের R বিন্দুতে লম্ব বলিয়া, উহা বৃত্তকে R বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।]

উদা. 12. Solve graphically the simultaneous equations (i) $x^2+y^2=53$ and (ii) $y-x=5$.

$x^2+y^2=53$ সমীকরণের লেখ একটি বৃত্ত। সমীকরণটি হইতে পাই $y^2=53-x^2$, $\therefore\ y=\pm\sqrt{53-x^2}$, এখানে পরীক্ষা দ্বারা দেখা যায় যে, $53=2^2+7^2$. অতএব $x=2$, $y=7$ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। এক্ষণে ছক কাগজে (2, 7) স্থানাঙ্কবিশিষ্ট P বিন্দু স্থাপন কর। P বিন্দুটি লেখটির উপরিস্থিত একটি বিন্দু পাওয়া গেল। এক্ষণে, মূলবিন্দু Oকে কেন্দ্র করিয়া এবং OP ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটি প্রথম সমীকরণের লেখ হইল।

[চিত্র নং ৯]

(ii) $y-x=5$, বা $y=5+x$, ইহা হইতে পাই

x	-2	1	2	··
y	3	6	7	··

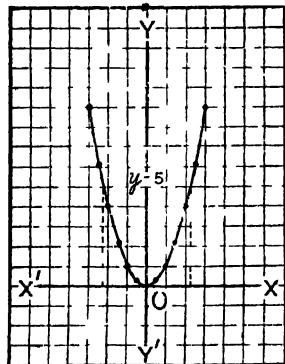
ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া এই লেখটি অঙ্কিত করা হইল। লেখ দুইটি P ও Q বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 7) এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-7, -2)$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=2$, $y=7$, অথবা $x=-7$, $y=-2$.

উদা. 13. Draw the graph of $y=x^2$ between the limits $x=3$ and $x=-3$, and hence find the value of $\sqrt{5}$ to the first decimal place. [C. U. '29, '38]

$y=x^2$ সমীকরণটির লেখ একটি অধিবৃত্ত হইবে। উহা হইতে পাই

x	0	±1	±2	±3	$\pm\cdot5$	$\pm1\cdot5$	$\pm2\cdot5$	···
y	0	1	4	9	·25	2·25	6·25	···

এখানে (0, 0), (1, 1), (−1, 1), (2, 4) (−2, 4) প্রভৃতি বিন্দুগুলি লেখটির উপরে থাকিবে। মনে কর, XOX' ও YOY' অক্ষদ্বয় O মূলবিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক লইয়া উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন কর। তারপর উহাদিগকে হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখা দ্বারা যোগ কর। ইহাতে যে অধিবৃত্তটি উৎপন্ন হইল তাহাই উদ্দিষ্ট লেখ। এখানে লেখটি $x=3$ ও $x=-3$ এই সীমার মধ্যে অঙ্কিত হইয়াছে।

[চিত্র নং ১০]

এখন এই লেখ হইতে $\sqrt{5}$ এর মান নির্ণয় করিতে হইবে। লেখটির উপরিস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইতে দেখা যাইতেছে যে, xএর মান yএর মানের বর্গমূল। সুতরাং yএর মান 5 হইলে তখন xএর মান যাহা হইবে তাহাই $\sqrt{5}$এর মান। লেখটিতে দেখা যায় যে, $y=5$ হইলে xএর মান হয় $\pm 2{\cdot}2$. অতএব, $\sqrt{5}=\pm 2{\cdot}2$ (প্রায়)।

[**দ্রষ্টব্য :** (1) y-এর প্রত্যেক মানের জন্য x-এর মান দুইটি হইতেছে, ঐ মান দুইটি সমান, কিন্তু পরস্পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত। সুতরাং লেখটির y-axis এর দুই দিকে প্রতিসাম্য রহিয়াছে। (2) x-এর মান ধনাত্মক, বা ঋণাত্মক যাহাই হউক না কেন, y-এর মান সর্বদাই ধনাত্মক, সুতরাং কোটিগুলি (ordinates) সবই x-axisএর উপরের দিকে অবাস্থিত। অতএব, লেখটির কোন অংশ x-axisএর নীচের দিকে থাকিতে পারে না। (3) লেখটি মূলবিন্দুগামী। (4) প্রশ্নে কোনরূপ সীমা নির্দেশ করা না থাকিলে লেখটি উপরের দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হইবে। সুতরাং অঙ্কিত চিত্রে শেষ বিন্দুদ্বয়ের পর লেখটি সামান্য একটু করিয়া বাড়াইয়া দিবে। এখানে অঙ্কিত লেখটিতে ঐরূপে বর্ধিত করা হয় নাই, কারণ এখানে $x=3$ এবং $x=-3$. এই সীমা নির্দেশ করা আছে। (5) অধিবৃত্ত আঁকিবার সময় অন্ততঃ ছয়টি বিন্দু সংস্থাপন করা উচিত। সমীকরণে যে অক্ষরটির দ্বিঘাত আছে, তাহার মান প্রথমে ধরিয়া অপরটির মান তাহা হইতে নির্ণয় করিবে। স্থাপিত বিন্দুগুলির পাশে স্থানাঙ্ক লিখিবে।]

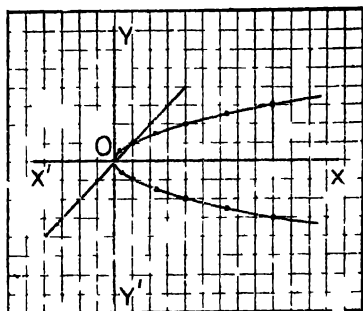
উদা. 14. Draw the graphs of $y^2 = x$ and $y = x$, and find the co-ordinates of their points of intersection, [G. U. '50]

(1) $y^2 = x$ হইতে পাই

x	0	1	4	9	·25	2·25	..
y	0	±1	±2	±3	±·5	±1·5	...

(2) $y = x$ হইতে পাই

x	0	2	-3	...
y	0	2	-3	·

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের একটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখ দুইটি অঙ্কিত করা হইল। প্রথম লেখটি একটি অধিবৃত্ত, দ্বিতীয়টি একটি সরলরেখা। উহারা যে বিন্দু দুইটিতে ছেদ করিয়াছে তাহাদের স্থানাঙ্ক (0, 0) এবং (1, 1)

[চিত্র নং ১১]

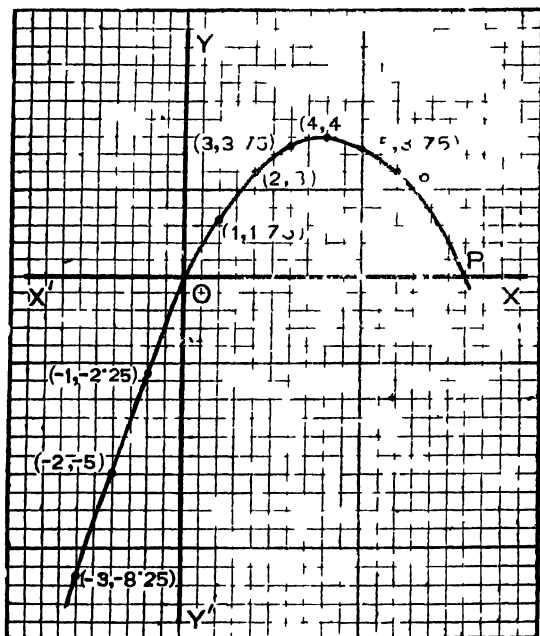
লেখ সাহায্যে সমীকরণ সমাধান

উদা. 15. Draw the graph of $y = 2x - \frac{x^2}{4}$ and obtain the roots of the equation $2x - \frac{x^2}{4} = 0$ from the graph.

প্রদত্ত সমীকরণ $y = 2x - \frac{x^2}{4}$ হইতে পাই,

x	0	1	1	2	−2	8	−8	4	5	6
$2x$	0	2	−2	4	−4	6	−6	8	10	12
$-\frac{x^2}{4}$	0	− 25	−·25	−1	−1	−2 25	−2·25	−4	−6 25	− 9
y	0	1 75	−2·25	8	−5	8 75	−8·25	4	8·75	8

এক্ষণে ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের দুইটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখটি অঙ্কিত করা হইল। [চিত্র নং ১২ দেখ]

প্রদত্ত সমীকরণটিতে yএর স্থানে 0 বসাইয়া পাই $2x - \frac{x^2}{4} = 0$, সুতরাং লেখ হইতে $2x - \frac{x^2}{4} = 0$, এই সমীকরণের বীজ নির্ণয় করিতে হইলে লেখটি x-অক্ষকে যে দুই বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, তাহাদের ভুজ দুইটি দেখিতে হইবে। এখানে লেখটি O এবং P বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করিয়াছে। O বিন্দুর ভুজ 0 এবং P বিন্দুর ভুজ 8. $\therefore$ নির্ণেয় বীজ দুইটি $x = 0$ এবং $x = 8$.

[চিত্র নং ১২]

উদা. 16. Give graphical solution of $2x^2 - x - 2 = 0$. [A. U. '15]

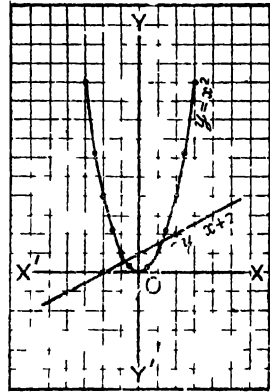
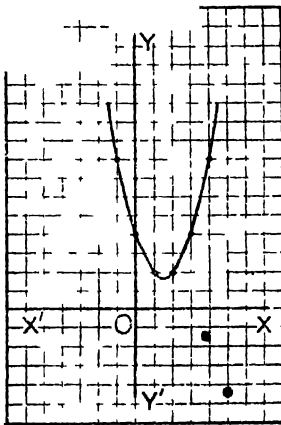
$2x^2 - x - 2 = 0$, বা, $2x^2 = x + 2$, $\therefore x^2 = \frac{x+2}{2}$.

মনে কর, $x^2 = y \cdots (1)$; সুতরাং $y = \frac{x+2}{2} \cdots (2)$

এক্ষণে (1) ও (2) সমীকরণ দুইটির লেখদ্বয় অঙ্কিত কর। প্রথম লেখটি অধিবৃত্ত (উদা. 13 দেখ), দ্বিতীয় লেখটি একটি সরল রেখা যাহা (0, 1), (2, 2), (−2, 0) প্রভৃতি বিন্দু দিয়া গিয়াছে। এখানে লেখ দুইটি যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহাদের ভুজদ্বয় 1·3, −·8 ;

∴ নির্ণেয় সমাধান $x = 1·3$ ও $-·8$.

[চিত্র নং ১৩]

[দ্রষ্টব্য : এখানে $y = 2x^2 - x - 2$ এবং $y = 0$ লিখিয়া দুইটি লেখ আঁকিলেও হইত। $y = 0$এর লেখ x-axis জানা-ই আছে। সুতরাং $y = 2x^2 - x - 2$ এর লেখটি x-axisকে যে-বিন্দু দুইটিতে ছেদ করিবে তাহাদের ভুজ হইবে 1·3, −·8]

উদা. 17. Prove graphically that the expression $x^2 - 3x + 4$ is positive for all real values of x. [C. U. '48]

এখানে $x^2 - 3x + 4$ একটি অপেক্ষক। মনে কর, ইহা y-এর সমান। ∴ $y = x^2 - 3x + 4$, ইহার লেখ একটি অধিবৃত্ত।

x	0	1	−1	2	3	4	···
y	4	2	8	2	4	8	···

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া ঐ বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং সন্তত রেখা দ্বারা বিন্দুগুলি যোগ করিয়া লেখটি আঁকা হইল।

[চিত্র নং ১৪]

লেখটি হইতে দেখা যাইতেছে যে, উহার কোন অংশ x-অক্ষের নীচে আসে নাই, সুতরাং xএর মান (যে কোন বাস্তব মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) যাহাই,

হউক না কেন, y-এর মান সর্বদা ধনাত্মক হইবে। অতএব, প্রমাণিত হইল যে x^2-3x+4এর মান সর্বদা ধনাত্মক।

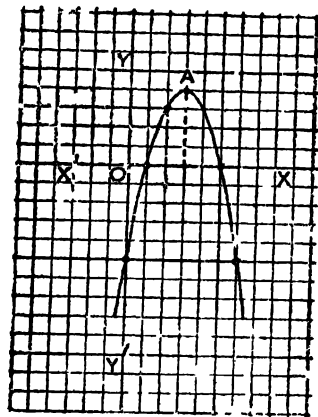
উদা. 18. Find graphically the maximum value of $6x-x^2-5$, and the value of x that gives the maximum value. [M. U. '28 ; D. B. '31]

মনে কর, প্রদত্ত অপেক্ষকটি $=y$. $\therefore$ $y=6x-x^2-5$, ইহার লেখ একটি অধিবৃত্ত হইবে। ইহা হইতে পাই

x	0	1	2	3	5	6	...
y	-5	0	3	4	0	-5	...

ছক-কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং সন্তত রেখা দ্বারা বিন্দুগুলি যোগ করিয়া অধিবৃত্তটি আঁকা হইল।

[চিত্র নং ১৫]

এখন y-এর চরম মানই প্রদত্ত অপেক্ষক $6x-x^2-5$এর চরম মান হইবে। লেখটিতে দেখা যায় যে, উহার কোন অংশ A বিন্দুর ঊর্ধ্বে উঠে নাই, এবং ঐ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 4) বলিয়া উহার কোটি $=4$.

অতএব $6x-x^2-5$এর বৃহত্তম মান 4 হইল। তখন নির্ণেয় x-এর মান 3.

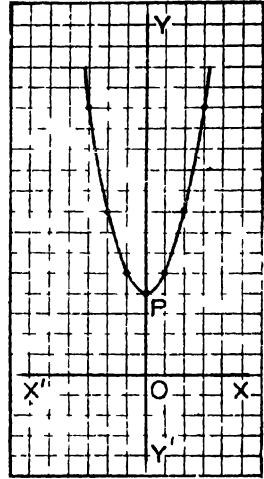
উদা. 19. Draw the graph of x^2+2x+5 from $x=-4$ to $x=2$. Find from the graph the minimum value of the function and the value of x that gives the minimum value. [D. B. 1932]

মনে কর, প্রদত্ত অপেক্ষকটি $=y$, সুতরাং $y=x^2+2x+5$, ইহার লেখ একটি অধিবৃত্ত হইবে। এই সমীকরণ হইতে পাই

x	0	1	-1	2	-2	-3	-4	..
y	5	8	4	13	5	8	13	...

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। বিন্দুগুলিকে হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখা দ্বারা যোগ করিলে যে অধিবৃত্ত হইল উহাই উদ্দিষ্ট লেখ।

[চিত্র নং ১৬]

y-এর অবম বা লঘিষ্ঠ মানই প্রদত্ত অপেক্ষকটির অবম মান হইবে। লেখটিতে দেখা যায় যে, উহার কোন অংশ P বিন্দুর নীচে নাই। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-1, 4)$ বলিয়া উহার কোটি 4ই y-এর অর্থাৎ প্রদত্ত অপেক্ষকটির লঘিষ্ঠ মান হইল এবং তখন x-এর মান -1 হইল।

উদা. 20. Trace the changes in sign and magnitude of the expression x^2-3x+2 as x increases from $-\infty$ to $+\infty$.

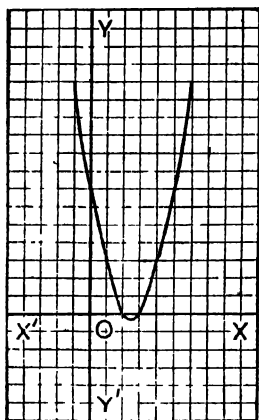
[C. U. '49]

x^2-3x+2এর লেখ এবং $y=x^2-3x+2$এর লেখ একই এবং একটি অধিবৃত্ত। এই সমীকরণটি হইতে পাই

x	0	1	2	3	4	-1	-2	...
y	2	0	0	2	6	6	12	...

মনে কর, XOX' এবং YOY' অক্ষদ্বয় O মূলবিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া ঐ বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখা দ্বারা বিন্দুগুলি যোগ করিয়া যে অধিবৃত্ত হইল উহাই উদ্দিষ্ট লেখ।

লেখটি হইতে দেখা যাইতেছে যে উহা উপরের দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হইতে পারে এবং উহার যে অংশটুকু x-অক্ষের নীচে আছে তাহা $x=1$ হইতে

$x=2$এর সীমার মধ্যে অবস্থিত। অতএব, x-এর মান 1 হইতে 2এর মধ্যে হইলে y-এর মান অর্থাৎ প্রদত্ত অপেক্ষকটির মান ঋণাত্মক হইবে। ঐ সীমার বাহিরে x-এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যতই হউক না কেন, y-এর মান আর ঋণাত্মক হইবে না। x-এর ধনাত্মক ও ঋণাত্মক মান অসীম পর্যন্ত ক্রমশঃ যতই বর্ধিত হইবে, তৎসঙ্গে y-এর মানও ক্রমশঃ অসীম পর্যন্ত বর্ধিত হইবে ও কেবল ধনাত্মক হইবে। এই বৃদ্ধির শেষ নাই বলিয়া লেখটির উভয় শাখাই x-অক্ষের উপরের দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হইবে।

[চিত্র নং ১৭]

উদা. 21. Draw the graphs of $y=x^2$ and $2y-5x+3=0$, and hence obtain the solution of the equation $2x^2-5x+3=0$.
[W. B. S. F. '52 ; D. B '29]

[*Hints* : এখানে $y=x^2\cdots(1)$ এবং $2y-5x+3=0$,
বা, $y=\frac{5x-3}{2}\cdots(2)$. প্রথমে এই সমীকরণ দুইটির লেখ অঙ্কিত কর।
এখন দেখ, $2x^2-5x+3=0$, বা $2x^2=5x-3$, $\therefore$ $x^2=\frac{5x-3}{2}$
$\therefore$ (1) ও (2) সমীকরণদ্বয়ের লেখদ্বয় পরস্পর যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে তাহাদের ভুজ দুইটিই $2x^2-5x+3=0$ সমীকরণটির বীজ হইবে। এখানে $x=1$ বা $1{\cdot}5$]

উদা. 22. Using the graphs of $y=x^2$ and $y=\frac{5x+2}{3}$ solve the equation $3x^2-5x-2=0$. [C. U. '48]

$y=x^2$ এই সমীকরণের লেখ একটি অধিবৃত্ত। উদা. 13-এর মত এই লেখটি আঁক।

$y=\dfrac{5x+2}{3}$, ইহা হইতে পাই

x	-1	2	-4	$\cdots$
y	-1	4	-6	$\cdots$

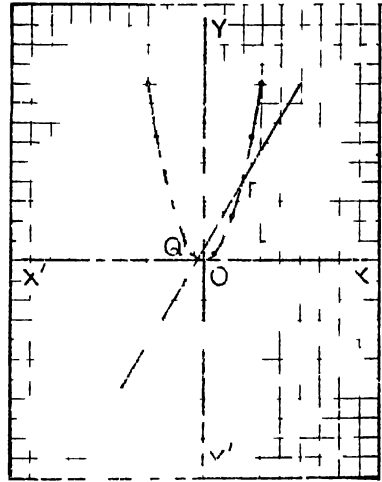
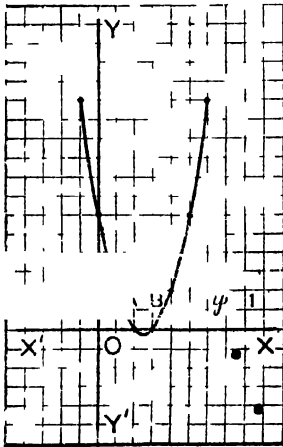
এই বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া যোগ করিলে যে সরলরেখাটি হইল উহাই দ্বিতীয় সমীকরণের লেখ।

[চিত্র নং ১৮]

∵ দুইটি সমীকরণই y-এর সমান, ∴ $x^2=\frac{5x+2}{3}$, বা $3x^2=5x+2$, বা, $3x^2-5x-2=0$. অতএব, লেখ দুইটির ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজদ্বয়ই $3x^2-5x-2=0$ এই সমীকরণের বীজ হইবে।

এখানে লেখদ্বয় P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং উহাদের ভুজ যথাক্রমে 2 ও $-\cdot3$ (প্রায়)।

∴ নির্ণেয় বীজ $x=2$ বা $-\cdot3$.

উদা. 23. Draw the graph of $y=x^2-3x+2$ and hence solve the equation $x^2-3x+1=0$,

[চিত্র নং ১৯]

উদা 20 দেখ। ঐ অধিবৃত্তটি এখানে $y=x^2-3x+2$ সমীকরণের লেখ। ঐ লেখটি হইতে $x^2-3x+1=0$ এই সমীকরণটি সমাধান করিতে হইবে।

এখানে $x^2-3x+1=0$,

বা, $x^2-3x+2=1$.

মনে কর, $y=x^2-3x+2$, সুতরাং $y=1$, এই সমীকরণ দুইটির লেখদ্বয়ের ছেদবিন্দু দুইটির ভুজদ্বয় নির্ণেয় বীজ হইবে। প্রথম সমীকরণের লেখ উদা. 20র মত আঁক। $y=1$এর লেখ হইবে x-অক্ষ হইতে 1 একক উপরে

x-অক্ষের সমান্তরাল রেখা। লেখদ্বয় পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক ('4, 1) এবং (2'6, 1). ∴ নির্ণেয় বীজ x='4, বা 2'6.

উদা. 24. Draw the graph of $y=5x^2+2x-1$. Read off the abscissa where this graph is cut by $y=3$. These are the roots of the equation $5x^2+2x-4=0$. Explain why.

[C. U. '48]

$y=5x^2+2x-1$ হইতে পাই

x	0	1	−1	2	−2	···
y	−1	6	2	23	15	···

মনে কর, XOX′ ও YOY′ অক্ষদ্বয় O মূলবিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া অধিবৃত্তটি অঙ্কিত কর। উহাই উদ্দিষ্ট লেখ হইল।

তারপর x-অক্ষ হইতে 3 একক উপরে ঐ অক্ষের সমান্তরাল রেখা আঁক। উহাই $y=3$এর লেখ হইল। এই লেখদ্বয় যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিল তাহাদের নির্ণেয় ভুজদ্বয় যথাক্রমে −1'7 ও '7.

এক্ষণে প্রদত্ত সমীকরণটি $5x^2+2x-4=0$, সুতরাং $5x^2+2x-1=3$. মনে কর, $y=5x^2+2x-1$, সুতরাং $y=3$, ∴ অঙ্কিত লেখদ্বয়ের ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজ দুইটিই $5x^2+2x-4=0$ সমীকরণের বীজ হইবে।

উদা. 25. Draw the graphs of $y=x^2$ and $x-y+6=0$. Hence solve $x^2-x-6=0$. [D. B. '14, '30, '40]

প্রথম সমীকরণের লেখ হইবে একটি অধিবৃত্ত। উদা. 13-র মত এই লেখটি অঙ্কিত কর। দ্বিতীয় সমীকরণের লেখ এক সরলরেখা। (0, 6), (−2, 4), (−6, 0) এই বিন্দুগুলি যোগ করিয়া এই লেখটি আঁক।

মনে কর, এই লেখ দুইটি A ও B বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। এক্ষণে, $x^2-x-6=0$ ∴ $x^2=x+6$; ধর $y=x^2\cdots(1)$ এবং $y=x+6$, বা $x-y+6=0\cdots(2)$. আমাদের অঙ্কিত অধিবৃত্তটি (1)-এর এবং সরল রেখাটি (2)-এর লেখ। সুতরাং A ও B-এর ভুজদ্বয়ই প্রদত্ত সমীকরণের নির্ণেয় বীজ হইবে। এখানে A বিন্দুর ভুজ −2 এবং B-এর ভুজ 3.

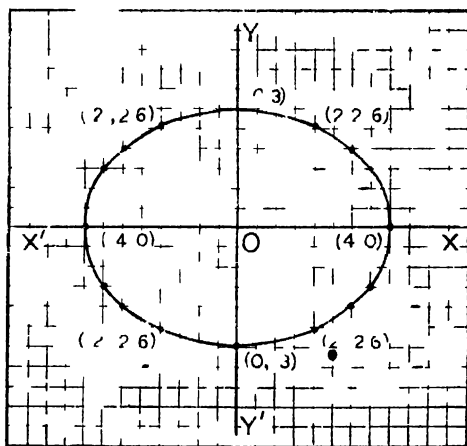
∴ $x=-2$ বা 3.

উদা. 26. Draw the graph of $9x^2+16y^2=144$.

$9x^2+16y^2=144$, বা $16y^2=144-9x^2=9(16-x^2)$,

বা, $y^2=\frac{9}{16}(16-x^2)$, $\therefore$ $y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\cdots(1)$, ইহা হইতে

x	0	±4	±1	±2	±3	±3.5	...
y	±3	0	±2.9	±2.6	±2.0	±1.5	...

এই বিন্দুগুলি সমীকরণটির লেখর উপর অবস্থিত। মনে কর, XOX', YOY' অক্ষদ্বয় লম্বভাবে O মূলবিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন কর। ঐ বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখাদ্বারা যোগ করিয়া যে উপবৃত্তটি (Ellipse) পাওয়া গেল, উহাই নির্ণেয় লেখ হইল।

[চিত্র নং ২০]

[দ্রষ্টব্য : (*a*) উপরের (1) হইতে দেখা যায় যে x-এর মান 4 অপেক্ষা বেশী ও -4 অপেক্ষা কম হইতে পারে না, কারণ, তাহা হইলে y-এর মান কাল্পনিক (imaginary) হয়। সুতরাং বুঝা গেল লেখটি $x=\pm4$ এই দুই সমান্তরাল সরল রেখার মধ্যে সীমাবদ্ধ। আবার, x-এর কোন মান লইলে তাহা হইতে y-এর দুইটি মান পাওয়া যায়, উহারা সমান কিন্তু একটি ঋণাত্মক ও অন্যটি ধনাত্মক। অতএব, লেখটি y-অক্ষ সম্বন্ধে প্রতিসম।

প্রদত্ত সমীকরণটিকে $x=\pm\frac{4}{3}\sqrt{9-y^2}$, এইভাবেও লেখা যায়। ইহা হইতে দেখা যায় যে, y-এর মান 3 অপেক্ষা বেশী এবং -3 অপেক্ষা কম হইলে x-এর মান কাল্পনিক হইয়া পড়ে। সুতরাং লেখটি $y=\pm3$ এই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে সীমাবদ্ধ। আর y-এর কোন মানের পক্ষে x-এর দুইটি সমান মান হয়, একটি ধনাত্মক অন্যটি ঋণাত্মক। অতএব লেখটি x-অক্ষ সম্বন্ধেও প্রতিসম। আর এই লেখটি সকল দিকে সীমাবদ্ধ বলিয়া একটি বদ্ধ (closed) রেখা হইল।

(b) **আরও দ্রষ্টব্য** এই যে, প্রদত্ত সমীকরণকে রূপান্তরিত করিয়া $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, এই আকারেও লেখা যায়। আবার, $4x^2+y^2-8x-4y=8$ এই সমীকরণটিকে $(4x^2-8x+4)+(y^2-4y+4)=16$,

বা, $4(x-1)^2+(y-2)^2=16$ এইভাবে লেখা যায়। অতএব ইহার লেখও একটি উপবৃত্ত। **সহজে ইহার লেখটি অঙ্কিত** করিতে হইলে মূলবিন্দুকে (1, 2) স্থানাঙ্কযুক্ত বিন্দুতে স্থানান্তরিত করিয়া অর্থাৎ (1, 2) বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিয়া $4x^2+y^2=16$, এই সমীকরণের লেখ অঙ্কিত করিলেই হইবে।

(c) $\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$ এই অপেক্ষকের লেখ এবং $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$ সমীকরণের লেখ একই।]

উদা. 27. Draw the graph of $9x^2-16y^2=144$.

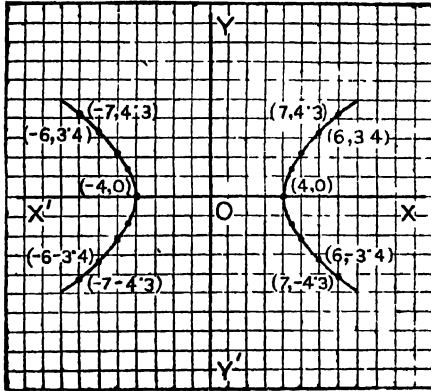
$9x^2-16y^2=144$, বা, $y^2=\frac{9x^2-144}{16}$, বা, $y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}$,

উহা হইতে পাই

x	±4	±5	±6	±7	$\pm4{\cdot}5$	⋯
y	0	$\pm2{\cdot}25$	$\pm3{\cdot}4$	$\pm4{\cdot}3$	$\pm1{\cdot}5$	⋯

মনে কর, XOX′ ও YOY′ অক্ষদ্বয় O মূলবিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন কর। এক এক পার্শ্বের বিন্দুগুলিকে হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখা দ্বারা যোগ করিলে যে লেখটি পাই তাহাই উদ্দিষ্ট লেখ [চিত্র নং ২১]। ইহাকে **পরাবৃত্ত** (Hyperbola) বলে।

[**দ্রষ্টব্য :** (1) x-এর কোন মান লইলে y-এর দুইটি সমান মান (একটি ঋণাত্মক, অন্যটি ধনাত্মক) পাওয়া যায়, সুতরাং লেখটি x-অক্ষ সম্বন্ধে প্রতিসম।

অনুরূপে উহা y-অক্ষ সম্বন্ধেও প্রতিসম। (2) এখানে $x=0$ হইলে, y-এর মান কাল্পনিক হয় বলিয়া লেখটি y-অক্ষকে কখনও ছেদ করিবে না। (3) এখানে x-এর মান ± 4-এর মধ্যে হইলে y-এর মান কাল্পনিক হইবে, সুতরাং

[চিত্র নং ২১]

লেখটির কোন অংশ $x=\pm 4$ এই দুই সমান্তরাল রেখার মধ্যে থাকিবে না (4) এই লেখটির দুইটি শাখা এবং উভয় শাখাই অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।]

উদা. 28. Draw the graph of $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 91 = 0$.

$9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 91 = 0$,

বা, $(9x^2 - 18x + 9) - (16y^2 + 64y + 64) - 36 = 0$,

বা, $9(x-1)^2 - 16(y+2)^2 = 36$.

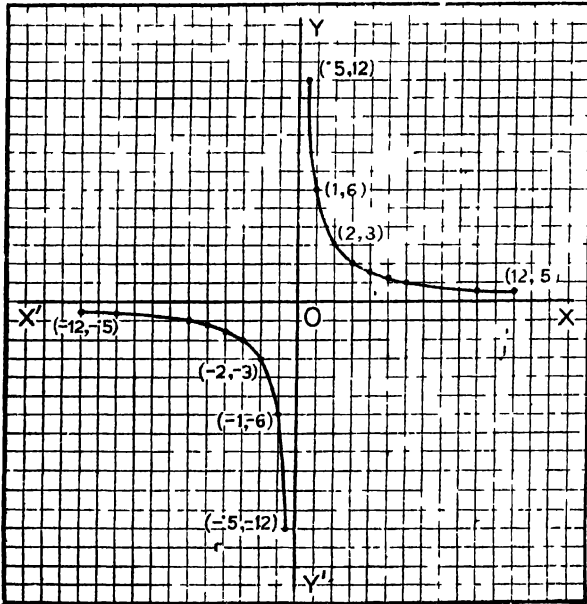
এক্ষণে মূলবিন্দুকে $(1, -2)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করিয়া $9x^2 - 16y^2 = 36$ এই সমীকরণের লেখ অঙ্কিত করিলেই প্রদত্ত সমীকরণের লেখ হইবে।

উদা. 29. Draw the graph of $xy = 6$.

$\because \; xy = 6, \; \therefore \; y = \frac{6}{x}$, ইহা হইতে পাই

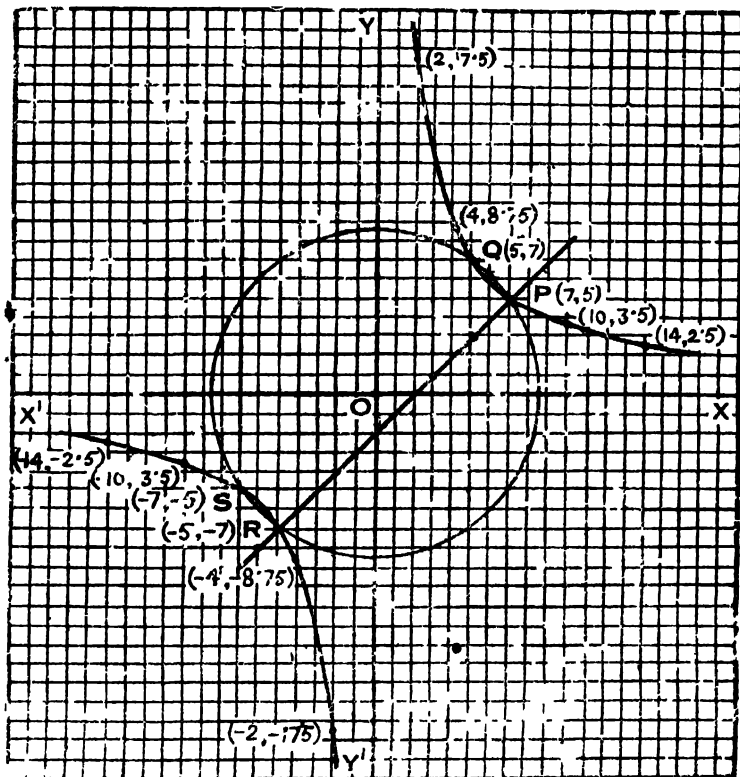
x	·5	−·5	1	−1	2	−2	4	−4	6	−6
y	12	−12	6	−6	3	−3	1·5	−1·5	1	−1

এই বিন্দুগুলি লেখটির উপরে অবস্থিত।

মনে কর, XOX′ ও YOY′ অক্ষদ্বয় O মূলবিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপন কর। এক এক পার্শ্বের বিন্দুগুলি হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখা দ্বারা যোগ করিলে যে **সম-পরাবৃত্ত** (rectangular hyperbola) পাইবে উহাই প্রদত্ত সমীকরণের লেখ [চিত্র নং ২২]।

[চিত্র নং ২২]

[**দ্রষ্টব্য :** (1) এই লেখটির দুইটি শাখা। একটি শাখা OX ও OY রেখাদ্বয়ের মধ্যে এবং অপরটি OX′ ও OY′ রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। (2) এখানে x-এর মান ক্রমশঃ যত বাড়িবে y-এর মান ক্রমশঃ তত কমিবে। অবশেষে x যদি অসীম হয়, তবে y-এর মান তখন শূন্য হইবে। অতএব রেখাটি ক্রমাগত x-অক্ষের নিকটবর্তী হইলেও, উহাকে কোন সসীম দূরত্বের মধ্যে ছেদ করিবে না ; কিন্তু অসীমে উহাদের ছেদবিন্দু থাকিবে। y-অক্ষের পক্ষেও ইহা সত্য হইবে]

উদা. 30. Solve the following pairs of equations graphically :

(i) $\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=74 \\ xy&=35 \end{aligned}\right\}$ and (ii) $\left.\begin{aligned} x-y&=2 \\ xy&=35 \end{aligned}\right\}$.

[চিত্র নং ২৩]

এখানে নিম্নলিখিত লেখ তিনটি অঙ্কিত করিতে হইবে :—

(1) $x^2+y^2=74$ (ইহার লেখ একটি বৃত্ত)

(2) $xy=35$ (ইহার লেখ একটি সম-পরাবৃত্ত)

(3) $x-y=2$ (ইহার লেখ একটি সরল রেখা।

(1) হইতে পাই $y^2=74-x^2$, বা $y=\pm\sqrt{74-x^2}$.

এক্ষেত্রে দেখা যায় $7^2+5^2=74$. অতএব, $x=7$, $y=5$ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

এক্ষণে ছক কাগজে (7, 5) স্থানাঙ্কবিশিষ্ট P বিন্দু স্থাপন কর এবং মূলবিন্দু Oকে কেন্দ্র করিয়া OP ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর; উহাই $x^2+y^2=74$ সমীকরণের লেখ হইল।

(2) $xy=35$, $\therefore\ y=\dfrac{35}{x}$, ইহা হইতে পাই

x	5	7	-5	-7	4	-4	10	-10	...
y	7	5	-7	-5	8·75	$-8·75$	3·5	$-3·5$	..

এই বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া সম-পরাবৃত্তটি অঙ্কিত কর।

(3) $x-y=2$, বা $y=x-2$, ইহা হইতে পাই

x	5	3	-2	·
y	3	1	-4	·

এই বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া সরল রেখাটি অঙ্কিত কর।

মনে কর, ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক লইয়া লেখত্রয় অঙ্কিত করা হইল।

এক্ষণে দেখা যাইতেছে বৃত্তটি সম-পরাবৃত্তকে P, Q, R, S বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। উহাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (7, 5), (5, 7), $(-5, -7)$ এবং $(-7, -5)$.

অতএব প্রদত্ত (i) সমীকরণযুগলের সমাধান

$$\left.\begin{matrix}x=7\\y=5\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=5\\y=7\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=-5\\y=-7\end{matrix}\right\}\ \text{এবং}\ \left.\begin{matrix}x=-7\\y=-5\end{matrix}\right\}.$$

আবার, সরলরেখাটি সম-পরাবৃত্তকে যে-দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহাদের স্থানাঙ্ক (7, 5) ও $(-5, -7)$.

অতএব, প্রদত্ত (ii) সমীকরণযুগলের সমাধান $x=7$, $y=5$;

অথবা, $x=-5$, $y=-7$.

56. লেখ অঙ্কন দ্বারা প্রশ্ন সমাধান

উদা. 1. If 1 lb. of tea costs Re. 1. 8as., find by means of a graph (*i*) the price of 5 lbs. of tea and (*ii*) the quantity of tea that can be had for Rs. 12.

মনে কর, x পাউণ্ড ওজনের চায়ের মূল্য y টাকা। এখানে বলা আছে 1 পাউণ্ড চায়ের মূল্য $\frac{3}{2}$ টাকা,

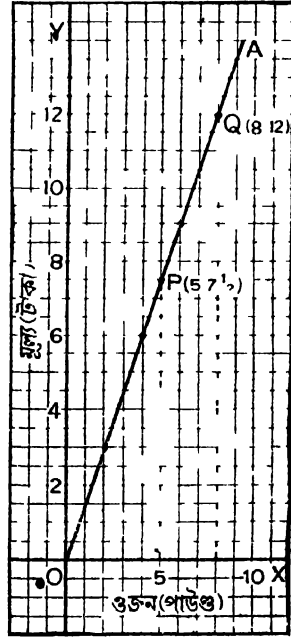
$\therefore$ x পাউণ্ড চায়ের মূল্য $\frac{3x}{2}$ টাকা

$\therefore$ $y=\frac{3}{2}x$ হইল এবং ইহাই এস্থলে উদ্দিষ্ট লেখটির সমীকরণ।

এক্ষণে মনে কর, ছক কাগজে x-অক্ষের উপর অবস্থিত ক্ষুদ্রতম ব র্গক্ষেত্রের একটি বাহু 1 পাউণ্ড ওজন এবং y-অক্ষের উপর অবস্থিত অনুরূপ দুইটি বাহু 1 টাকা মূল্য সূচিত করে।

$y=\frac{3}{2}x$ হইতে

x	2	4	6
y	3	6	9

$y=\frac{3}{2}x$এর লেখ OA আঁকা হইল।

(i) এই লেখটির যে কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটি দ্বারা যথাক্রমে চায়ের ওজন (পাউণ্ডে) এবং উহার মূল্য (টাকায়) সূচিত হইবে।

লেখটি হইতে দেখা যায় যে, লেখটির যে বিন্দুর (P) ভুজ 5 একক, তাহার কোটি $=7\frac{1}{2}$ একক, সুতরাং 5 পাউণ্ড চায়ের মূল্য $7\frac{1}{2}$ টাকা হইল।

(ii) আবার, দেখা যায় লেখটির যে বিন্দুর (Q) কোটি 12 একক তাহার ভুজ $=8$ একক ; সুতরাং 12 টাকায় 8 পাউণ্ড চা পাওয়া যাইবে।

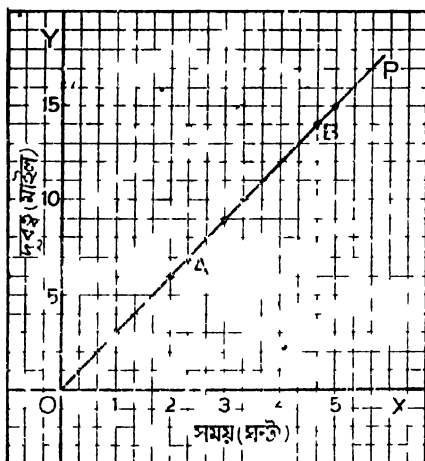
[**দ্রষ্টব্য :** এখানে OA সরলরেখাকে চায়ের **মূল্য-লেখ** (Price graph) বলে।]

উদা. 2. A man walks at the rate of 3 miles an hour. Draw his motion-graph and find from it (*i*) how far he will walk in 2 hrs. 20 mins. and (*ii*) in what time he will walk 14 miles.

মনে কর, লোকটি x ঘণ্টায় y মাইল যায়। এখানে লোকটি 1 ঘণ্টায় 3 মাইল যায়, সুতরাং x ঘণ্টায় যায় $3x$ মাইল।

∴ y মাইল $=3x$ মাইল। ∴ $y=3x$ এই সমীকরণের লেখটি লোকটির **গতি-লেখ** (motion-graph) হইবে।

মনে কর, x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 3টি বাহু 1 ঘণ্টা বা 1টি বাহু 20 মিনিট সূচিত করে এবং y-অক্ষ বরাবর অনুরূপ 1টি বাহু এক মাইল সূচিত করে।

$y=3x$এর লেখ OP আঁকা হইল। OP সরল-রেখাই উদ্দিষ্ট গতি-লেখ। এই লেখটির যে কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটি দ্বারা যথাক্রমে গতির সময় ও দূরত্ব সূচিত হইবে।

(i) 2 ঘ. 20 মি. $=\frac{7}{3}$ ঘণ্টা। এখানে দেখা যায় লেখটির যে বিন্দুর (A) ভুজ $=7$ বাহু $=\frac{7}{3}$ একক, তাহার কোটি $=7$ বাহু $=7$ একক। অতএব, লোকটি $\frac{7}{3}$ ঘণ্টায় বা 2 ঘণ্টা 20 মিনিটে 7 মাইল পথ যাইবে।

(ii) আবার দেখা যায় যে, লেখস্থিত যে বিন্দুর (B) কোটি $=14$ একক, তাহার ভুজ $=\frac{14}{3}$ একক (14 বাহু); সুতরাং 14 মাইল যাইতে লোকটির $\frac{14}{3}$ ঘ. বা 4 ঘণ্টা 40 মিনিট সময় লাগিবে।

[**দ্রষ্টব্য :** OP লেখটিকে লোকটির **গতি-লেখ** (motion-graph) বলে। লোকটি সমবেগে গতিশীল বলিয়া তাহার গতি-লেখ একটি সরল রেখাই হইবে।]

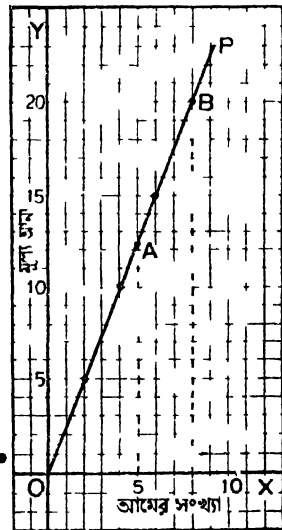
উদা 3. If the price of two mangoes be 5 annas, find graphically the price of 5 mangoes and the number of mangoes that can be had for Re. 1. 4 as.

মনে কর, x সংখ্যক আমের মূল্য y আনা। এখানে 2টি আমের মূল্য $=5$ আনা,

1টি আমের মূল্য $=\frac{5}{2}$ আনা, $\therefore$ x আমের মূল্য $=\frac{5x}{2}$ আনা।

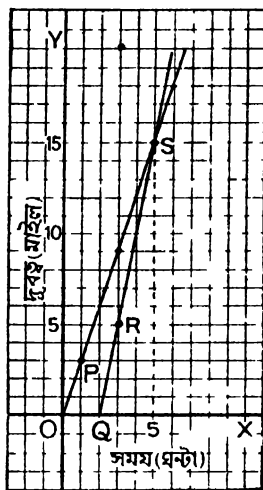
অতএব, এস্থলে $y=\frac{5x}{2}$, এই সমীকরণের লেখটি আমের **মূল্য-লেখ** হইবে।

x-অক্ষের উপরিস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে একটি আম এবং y অক্ষের উপর অবস্থিত অনুরূপ একটি বাহুকে 1 আনা ধরিয়া $y=\frac{5x}{2}$এর লেখ OP আঁকা হইল।

এক্ষণে, লেখ হইতে দেখা যাইতেছে যে (i) এই লেখটির যে বিন্দুর (A) ভুজ $=5$ একক, তাহার কোটি $=12\frac{1}{2}$ একক।

$\therefore$ 5টি আমের মূল্য $=12\frac{1}{2}$ আনা।

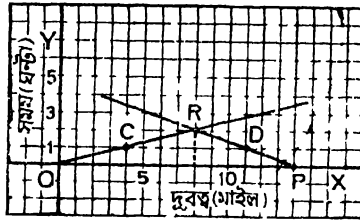
(ii) আবার, 1 টা 4 আ. $=20$ আনা। লেখটির যে বিন্দুর (B) কোটি $=20$ একক, তাহার ভুজ $=8$ একক, সুতরাং 20 আনায় বা 1 টা. 4 আনায় 8টি আম পাওয়া যাইবে।

উদা. 4. *A* starts walking at 8 A.M. at the rate of 3 miles an hour. After 2 hours *B* runs after him at the rate of 5 miles an hour. Find graphically when and where *B* will overtake *A*.

মনে কর, x-অক্ষস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে 1 ঘণ্টা এবং y-অক্ষস্থিত অনুরূপ এক বাহুকে 1 মাইল ধরা হইল। মনে কর, O মূল-বিন্দু হইতে A রওনা হইয়া ঘণ্টায় 3মা. বেগে চলিতে লাগিল। মনে কর, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 3), সুতরাং P বিন্দুর ভুজ 1 এককে 1 ঘণ্টা ও কোটি 3 এককে 3 মাইল সূচিত করে বলিয়া ঐ বিন্দুটি A-এর গতি-লেখস্থিত হইবে। ∴ বর্ধিত OP সরল রেখাই A-র গতি-লেখ হইল।

আবার, A রওনা হওয়ার 2 ঘণ্টা পরে B রওনা হইয়াছে বলিয়া ঐ 2 ঘণ্টা B মোটেই চলে নাই, 2 ঘণ্টা অতীত হইয়াছে বটে, কিন্তু তার গতি 0 মাইল। Q এমন একটি বিন্দু স্থাপন কর যাহার স্থানাঙ্ক (2, 0), সুতরাং OQ রেখা হইবে B-এর ঐ 2ঘণ্টার (8টা হইতে 10টার) গতি-লেখ। তারপর সে ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে চলিয়াছে। এক্ষণে, ঐ Q বিন্দুকে মূল-বিন্দু ধরিয়া R এমন একটি বিন্দু স্থাপন কর যাহাব স্থানাঙ্ক (1, 5)। এক্ষণে বর্ধিত QR সরলরেখাই B-এর 2 ঘণ্টার পরবর্তীকালের গতি-লেখ হইল।

ঐ OP ও QR লেখদ্বয় পরস্পর S বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। O-কে মূল-বিন্দু ধরিয়া S-এর স্থানাঙ্ক হইল (5, 15), ঐ ভুজ 5 এককে 5 ঘণ্টা এবং কোটি 15 এককে 15 মাইল সূচিত করে। ∴ A-রওনা হওয়ার 5 ঘণ্টা পরে বেলা 1 টায় এবং যাত্রাস্থল হইতে 15 মাইল দূরে A-কে B ধরিতে পারিবে।

উদা. 5. *A* and *B* are at a distance of 14 miles and start at the same time cycling towards each other at the rates of 4 and 3 miles per hour respectively. Find by a graph when and where they will meet.

ছক কাগজে x ও y অক্ষ অঙ্কিত কর এবং মূল-বিন্দু O লও। মনে কর, x-অক্ষস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহু দ্বারা 1 মাইল এবং y-অক্ষস্থিত অনুরূপ 1 বাহু দ্বারা 1 ঘণ্টা সূচিত হয়।

x অক্ষের উপর O বিন্দু হইতে 14 বাহু দূরে P বিন্দু লও, ইহাতে OP 14 মাইল সূচিত করিল।

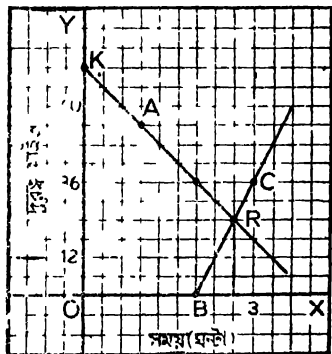
মনে কর A ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে O হইতে P-এর দিকে এবং B ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে P হইতে O-এর দিকে যাইতে লাগিল। অতএব A র গতিচিত্র O বিন্দুগামী একটি সরলরেখা এবং B-এর গতিচিত্র P বিন্দুগামী একটি সরলরেখা হইবে। এক্ষণে, ∵ A 4 মাইল যায় 1 ঘণ্টায়, ∴ তাহার গতি-লেখ (4, 1) বিন্দু C দিয়া যাইবে। অতএব, বর্ধিত OC সরলরেখা A-র গতি লেখ হইল।

আবার, P বিন্দুকে মূল-বিন্দু ধরিয়া D বিন্দুর ভুজ ও কোটি যথাক্রমে 3 ও 1 একক লও। সুতরাং বর্ধিত PD সরলরেখা B-এর গতি-লেখ হইল। লেখ দুইটি R বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। O মূল-বিন্দু ধরিয়া R বিন্দুর স্থানাঙ্ক (8, 2), উহা দ্বারা 8 মা. এবং 2 ঘণ্টা সূচিত হয়। অতএব, A-র যাত্রাস্থল হইতে 8 মাইল দূরে এবং রওনা হইবার 2 ঘণ্টা পরে উভয়ে মিলিত হইবে।

উদা. 6. A mail train starts from Howrah at 9 P. M. and reaches Kharagpur, a distance of 72 miles, at 11 P. M. A passenger train starts from Kharagpur at 7 P. M. and

reaches Howrah at 11 P. M. Find graphically when and where they meet. [W. B. S. F. 1955 (Addl.)]

মনে কর, মেল ট্রেণকে M এবং যাত্রীবাহী ট্রেণকে P ধরা হইল। M ট্রেণ এক ঘণ্টায় (72÷2) মা. বা 36 মাইল যায় এবং P ট্রেণ এক ঘণ্টায় (72÷4) বা 18 মাইল যায়।

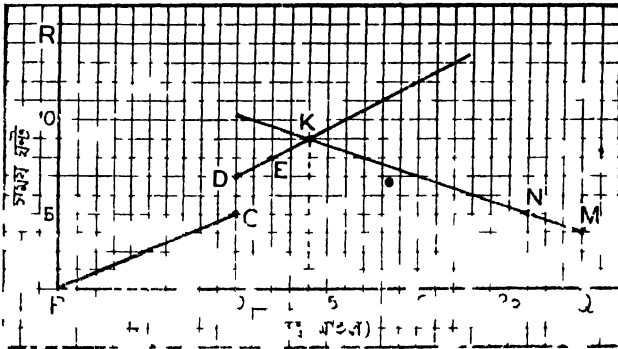
ছক কাগজে x ও y অক্ষ অঙ্কিত করিয়া মূল-বিন্দু O লও। x-অক্ষস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 3টি বাহুর সমান দৈর্ঘ্যকে এক ঘণ্টা এবং y-অক্ষের উপর অনুরূপ একটি বাহুকে 6 মাইল ধর।

মনে কর, O বিন্দুতে হাওড়ার অবস্থান এবং OY-এর উপর O হইতে 72 মাইল (অর্থাৎ 12টি বাহু) দূরে K বিন্দুতে খড়্গপুরের অবস্থান।

ট্রেণ দুইটি সমবেগে যায় বলিয়া উহাদের গতি-চিত্র দুইটি সরলরেখা হইবে। P ট্রেণটি 7টায় K বিন্দু হইতে রওনা হইয়াছে, সুতরাং K বিন্দু উহার গতি-চিত্রের উপর থাকিবে। আবার, P ট্রেণ হাওড়ার দিকে (অর্থাৎ উল্টাদিকে) 1 ঘণ্টায় 18 মাইল গিয়াছে। Kকে মূল-বিন্দু ধরিয়া A এমন একটি বিন্দু স্থাপন কর যাহার স্থানাঙ্ক দ্বারা 1 ঘণ্টা ও 18 মাইল সূচিত হয় অর্থাৎ যাহার ভুজ=3 বাহু এবং কোটি=3 বাহু (নিম্নের দিকে)। A বিন্দু P-এর গতি চিত্রের উপর অবস্থিত থাকিবে। KA যোগ কর। এই বর্ধিত KA সরলরেখা P-এর গতি-লেখ হইল।

আবার, M ট্রেণ 9টার সময় যাত্রা করায় প্রথম 2 ঘণ্টায় (7টা হইতে 9টা) M ট্রেণ কোন দূরত্ব যায় নাই। OX-এর উপর এমন একটি বিন্দু B লও যেন OB দ্বারা 2 ঘণ্টা (6টি বাহু) সূচিত হয়। এই B বিন্দু M ট্রেণের যাত্রা-স্থান সূচিত করিবে এবং উহা M ট্রেণের গতি-চিত্রের উপর অবস্থিত থাকিবে। M ট্রেণ এক ঘণ্টায় 36 মা. যায়। Bকে মূল-বিন্দু ধরিয়া C এমন একটি বিন্দু বসাও যাহার স্থানাঙ্ক দ্বারা 1 ঘণ্টা ও 36 মাইল সূচিত হয় অর্থাৎ যাহার

ভুজ=3 বাহু এবং কোটি=6 বাহু। C বিন্দু M ট্রেণের গতি-চিত্রের উপর অবস্থিত, সুতরাং বর্ধিত BC সরলরেখা M ট্রেণের গতি-লেখ।

O মূল-বিন্দু হইতে উক্ত লেখ দুইটির ছেদবিন্দু R-এর ভুজ=8 বাহু (অর্থাৎ $\frac{8}{3}$ ঘণ্টা বা 2 ঘ 40 মি.) এবং কোটি=4 বাহু (অর্থাৎ 4×6 বা 24 মাইল)। অতএব, 7টার 2 ঘ. 40 মি. পরে অর্থাৎ 9টা 40 মিনিটের সময় হাওড়া হইতে 24 মাইল দূরে উভয় ট্রেণের সাক্ষাৎ হইবে।

উদা 7. *P* and *Q* are two places 29 miles apart *A* starts from *P* and walks towards *Q* at $2\frac{1}{2}$ miles an hour. After 4 hours he takes rest for 2 hours and then resumes his journey at the rate of 2 miles an hour. *B* starts from Q 3 hours after *A* leaves *P* and walks towards *P* at the rate of 3 miles an hour. Find graphically when and where they will meet.

মনে কর, ছক কাগজে পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত PQ ও PR সরল রেখাদ্বয় যথাক্রমে *x* ও *y* অক্ষরেখা সূচিত করে। আর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক একটি বাহু PQ রেখার উপর এক মাইল এবং PR রেখার উপর এক ঘণ্টা নির্দেশ করে। এখানে PQ=29 বাহু (29 মাইল)।

(i) P হইতে রওনা হইয়া A ঘণ্টায় $2\frac{1}{2}$ মা. বেগে 4 ঘণ্টায় ($2\frac{1}{2} \times 4$) বা 10 মাইল গিয়াছে। C একটি বিন্দু স্থাপন কর যাহার স্থানাঙ্ক (10, 4) অর্থাৎ যাহার ভুজ 10 বাহু দ্বারা 10 মাইল এবং কোটি 4 বাহু দ্বারা 4 ঘণ্টা বুঝায়। PC যোগ কর। PC রেখা A-এর প্রথম 4 ঘণ্টার গতি-লেখ হইল। তারপর 2 ঘণ্টা A বিশ্রাম করায় ঐ সময়ে কোন দূরত্ব যায় নাই ; সুতরাং তাহার ঐ দুই ঘণ্টার গতি-লেখ এরূপ হইবে যাহার উপরিস্থ যে কোন বিন্দুর ভুজ 10 মাইল নির্দেশ করিবে। এখন C-কে মূল-বিন্দু ধরিয়া D এমন একটি বিন্দু স্থাপন কর যাহার স্থানাঙ্ক (0, 2), সুতরাং CD সরলরেখা A-র 2 ঘণ্টা বিশ্রামকালের গতি-লেখ হইল।

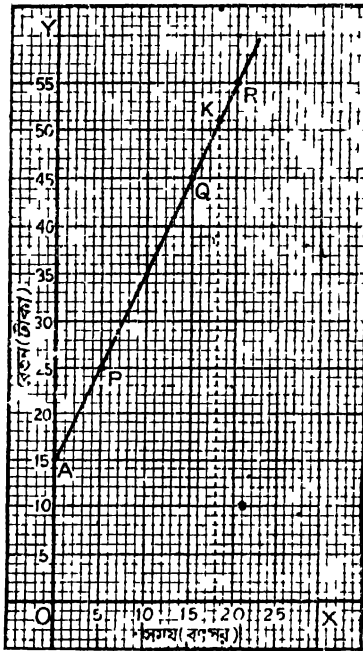
ইহার পর A ঘণ্টায় 2 মাইল গতিতে D বিন্দু হইতে রওনা হইয়া Q-এর দিকে চলিতে লাগিল। এখন D-কে মূল-বিন্দু ধরিয়া এমন একটি বিন্দু স্থাপন কর যাহার স্থানাঙ্ক (2, 1) ; সুতরাং বর্ধিত DE সরলরেখা A-র বিশ্রামের পরবর্তী কালের গতি-লেখ হইল।

(ii) আবার, A রওনা হওয়ার 3 ঘণ্টা পরে Q বিন্দু হইতে B রওনা হইয়াছে, সুতরাং এই তিন ঘণ্টায় B কোন দূরত্ব যায় নাই। এখন Q-কে মূল-বিন্দু ধরিয়া M এমন একটি বিন্দু স্থাপন কর যাহার ভুজ দ্বারা 0 মাইল এবং কোটি দ্বারা 3 ঘণ্টা সূচিত হয়। QM সরলরেখা B-র 3 ঘণ্টা বিশ্রামকালের গতি-লেখ হইল। তৎপরে B ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে M বিন্দু হইতে P-র দিকে চলিয়াছে। M-কে মূল-বিন্দু ধরিয়া N বিন্দু স্থাপন কর যেন N-এর ভুজ ও কোটি দ্বারা যথাক্রমে 3 মাইল ও 1 ঘণ্টা সূচিত হয়। অতএব বর্ধিত MN সরলরেখা B-র বিশ্রামের পরবর্তীকালের গতি-লেখ।

এখানে DE ও MN লেখদ্বয় পরস্পর K বিন্দুতে ছেদ করিল। P-কে মূল-বিন্দু ধরিয়া K-এর ভুজ ও কোটি (অর্থাৎ স্থানাঙ্ক) দ্বারা যথাক্রমে 14 মাইল ও 8 ঘণ্টা সূচিত হইতেছে। অতএব P হইতে 14 মাইল দূরে এবং A রওনা হওয়ার 8 ঘণ্টা পরে A ও B পরস্পর মিলিত হইবে।

উদা. 8. A man's salary after 5 years of service is 25 rupees, after 15 years it is 45 rupees and after 20 years it is

55 rupees. If his salary was increasing at a uniform rate, show by graph his starting salary and the salary he will get after 18 years' service. [Pat. U. 1945]

এখানে বেতন সমহারে বাড়িতেছে বলিয়া লেখটি একটি সরলরেখা হইবে এবং 5 বৎসর ও 25 টাকা, 15 বৎসর ও 45 টাকা, 20 বৎসর ও 55 টাকা সূচক বিন্দুগুলি ঐ লেখস্থিত হইবে।

মনে কর, x-অক্ষস্থিত ক্ষুদ্রতম একটি বাহু 1 বৎসর এবং y-অক্ষস্থিত অনুরূপ একটি বাহু 1 টাকা সূচিত করে।

এক্ষণে, P এমন একটি বিন্দু স্থাপন কর যাহার স্থানাঙ্ক (5, 25) অর্থাৎ যাহার ভুজ (5 বাহু) দ্বারা 5 বৎসর এবং কোটি (25 বাহু) দ্বারা 25 টাকা বুঝায়। এইরূপে (15, 45) ও (20, 55) স্থানাঙ্কবিশিষ্ট যথাক্রমে Q ও R

বিন্দু স্থাপন কর। RQP যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন y-অক্ষকে (OY-কে) A বিন্দুতে ছেদ করিল। AR সরলরেখাই উদ্দিষ্ট লেখ হইল। সুতরাং লেখ হইতে দেখা যায় A বিন্দুর ভুজ = 0 বাহু এবং কোটি = 15 বাহু, সুতরাং প্রারম্ভিক বেতন ছিল 15 টাকা।

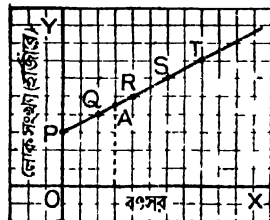
আবার, 18 বৎসর পরের বেতন নির্ণয়ের জন্য লেখ হইতে দেখ, যে-বিন্দুর ভুজ = 18 বাহু, তাহার কোটি কত। লেখটিতে দেখা যায় K বিন্দুর ভুজ = 18 হইলে উহার কোটি হয় 51. অতএব 18 বৎসর চাকরির পর বেতন হইবে 51 টাকা।

উদা. 9. The population of a certain town is given by the following table :—

Year	...	1905	1915	1925	1935	1945
Population in thousands	...	15	20	25	30	35

Read the population of the town in 1920. [Pat. U. '46]

এখানে লোকসংখ্যা সমহারে বর্ধিত হওয়ায় লেখ একটি সরলরেখা হইবে।

মনে কর, x-অক্ষস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে 5 বৎসর এবং y-অক্ষস্থিত অনুরূপ একটি বাহুকে 5 হাজার লোকসংখ্যা ধরা হইল। 1905 সালকে প্রারম্ভিক বৎসর ধরা যাউক। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 3) লও; উহার ভুজ = 0 দ্বারা প্রারম্ভিক সাল 1905 এবং কোটি = 3 দ্বারা 15(3 × 5) হাজার বুঝাইল। এখন যে বিন্দু 1915 সালের লোকসংখ্যা 20 হাজার নির্দেশ করিবে তাহার স্থানাঙ্ক হইবে (2, 4), কারণ উহার ভুজ 2 একক দ্বারা 10 বৎসর (1905 সালের পর) এবং কোটি 4 একক দ্বারা 20 হাজার লোক বুঝাইবে, উহাকে Q বিন্দু ধর। অনুরূপে ছক কাগজে R (4, 5), S (6, 6), T (8, 7) বিন্দুগুলি স্থাপন কর। উহাদের দ্বারা যথাক্রমে 1925, 1935, 1945 সালের লোকসংখ্যা সূচিত হইল। অতএব, PT সরলরেখাই উদ্দিষ্ট লেখ হইল। ঐ লেখ হইতে 1920 সালের

লোকসংখ্যা নির্ণয় করিবার জন্য দেখিতে হইবে, যে বিন্দুর ভুজ $=3$ একক ($1920-1905=15$ব. $=3$ একক), তাহার কোটি কত। এখানে A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, 4\frac{1}{2})$, সুতরাং উহার কোটি $4\frac{1}{2}$ একক দ্বারা $(5\times4\frac{1}{2})$ হাজার বা 22500 লোক বুঝায়।

$\therefore$ 1920 সালের লোকসংখ্যা $=22500$.

Exercise 12

Solve graphically .—

1. (*a*) $4x+3y=15$ and $x-y=2$

   (*b*) $2x+3y=13$ and $3x-2y=13$ [P. U. '24]

   (*c*) $\frac{3x-4}{2}=3x\ \frac{1}{2}$ [P. U. '25]

   (*d*) $\frac{2x+4}{6}=2x-1$ (*e*) $x-2=5$

Draw the graphs of :—

2. (i) $x^2+y^2=36$ [C.U.'41]   (ii) $(x-2)^2+(y\ \ 1)^2=25$.

3. $x^2-8y+y^2-6x-24=0$ [D U. '26]

4. $(x+1)^2+(y-3)^2=16$ 5. $x^2+y^2=48$.

6. $x^2+y^2=40$ 7. $y^2=4x$ [C. U. '25, '36, '40, '42]

8. $y=(x+1)^2$ [C U. '27]   9. $y=x^2-x-6$.

10. $y=4x^2$ 11. $y^2+4x=0$ [C. U. '28, '39]

12 $5x^2-10x+9$ [C. U. '47]   13. $x^2+y^2-2x-4y=20$

14. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ [C. U. '44]   15. $4x^2+9y^2=64$

16. $x^2-y^2=1$ 17. $x^2-y^2=9$ 18. $xy=12$ [A. U. '16]

19. $x^2=25$ 20 $3x^2-5xy+2y^2=0$

21. Draw the graphs of $x^2+y^2=169$ and $x+y=17$; and find the co-ordinates of their points of intersection.

[G. U. '51]

22. Draw the graphs of $y=x^2$ and $y=2x-1$, and determine where they meet. [C. U. '45]

23. Trace the graphs of $y=x$ and $y=\frac{x^2}{4}$ and determine the points where they intersect. [E. B. S. B. '51]

24. Trace the changes in sign and magnitude of x^2-4x+3 as x increases from $-\infty$ to $+\infty$.

25. Draw the graphs of $4y=x^2$ and $2y=x+4$ between the values $x=-4$ and $x=4$ and find from the graphs their points of intersection. [C. U. '51]

26. Draw the graph of $y=4x^2-3x+2$ and use it to find the minimum value of y. [E. B. S. B. '49]

27. Draw the graphs of $x^2+y^2=25$ and $x+y=7$; and measure the co-ordinates of their points of intersection.

[C. U. '12 ; D. B. '25]

28. Draw the graph of $2+x-2x^2$ and find from it the maximum value of the function. [D. B. '40]

29. Draw the graphs of $y^2=8x$ and $y=2x+1$ and indicate their common point, if any. [C. U. '50]

30. Trace the graph of $y=x^2-6x+10$ and find the least value of y. D. B. '24]

31. Solve graphically $x^2-x-2=0$. [C.U. '49 ; G.U.'48]

32. Solve graphically $2x^2-5x+3=0$. [E. B. S. B. '48]

33. Prove graphically that x^2-4x+5 is positive for all real values of x.

34. Draw the graphs of $y=x^2$ and $y=2x+3$. Hence solve graphically $x^2=2x+3$. [G. U. '49]

35. Draw the graphs of $4y=x^2$ and $2y=x+4$ between $x=-4$ and $x=+4$, and measure the length of the chord of intersection. [G. U. '41]

36. Draw the graphs of $y=x^2+3$ and $y=4x$ and hence find the solution of $x^2-4x+3=0$. [D. B. '37]

[Hints : $x^2-4x+3=0$, বা $x^2+3=4x$; সুতরাং $y=x^2+3$ এবং $y=4x$ এই সমীকরণ দুইটির লেখদ্বয়ের ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজ দুইটিই নির্ণেয় বীজ।)

37. In the same diagram draw the graphs of $2x+1$ and x^2. From your graphs read as accurately as you can the value or values of x which will make $x^2=2x+1$. [C. U. '30]

38. Draw the graphs of $x^2+y^2=16$ and $x+y=2$ and measure the length of the chord of intersection. [C. U. '13]

39. Trace the graph of $y=x^2-4x+5$ from $x=0$ to $x=4$ and find the least value of y. [C. U. '18]

40. Draw the graph of $2x^2-7x-3$ between $x=-1$ and $x=+5$. From your graph determine the roots of $2x^2-7x+3=0$.

41. Draw the graphs of $y=x^2+3x$ and $y=-2$. Hence find the roots of $x^2+3x+2=0$. [C. U. '46]

[Hints : $x^2+3x+2=0$, বা $x^2+3x=-2$, মনে কর, $y=x^2+3x$ এবং $y=-2$; সুতরাং এই সমীকরণের লেখ দুইটির ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজ দুইটিই নির্ণেয় বীজ।]

42. Draw the graph of $y^2=4x$ and prove that there is no part of the graph on the negative side of the axis of X. [C. U. '25]

43. Solve the equation $x^2-6x+8=0$ by drawing the graph of $y=x^2$. [C. U. '47]

[Hints : $x^2-6x+8=0$, বা $x^2=6x-8$; মনে কর, $y=x^2$, ∴ $y=6x-8$. এখানে $y=x^2$এর লেখ আঁকিতে হইবে এবং $y=6x-8$এর লেখটিও অঙ্কিত করিলে তবে প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান করা যাইবে।

44. Draw the graphs of $y=x^2$ and $x=y^2$ and find the co-ordinates of their points of intersection. [C. U. '32]

45. Draw the graph of x^2+2x+5 from $x=-4$ to $x=2$. Find from the graph the minimum value of the function and the value of x that gives the minimum value. [D. B. '32]

46. Draw the graph of x^2+2x+3 from $x=-5$ to $x=3$. Read off from the graph answers to the following questions :

(i) What is the least value of the function ? (ii) What value of x gives this least value ? (iii) For what value of x does the function take the value 4 ? [M. U. '26]

47. Plot the graph of $xy=80$ between the values $x=\pm 20$. [M. U. '13]

Draw the graphs of :

48. $y=\frac{1}{2}x^2-3$ [M. U. '12] 49. $\sqrt{x}$.

50. $4x^2-16x+y^2+2y-8=0$.

51. $9x^2-18x-16y^2-32y-151=0$.

52. Find the co-ordinates of the point where the graph of $3x-4y+25=0$ touches the graph of $x^2+y^2=25$.

53. Solve graphically the equation $2x^2-9x-5=0$.

[C. U. '50]

54. A cyclist starts at 8 A.M. on a ride of 20 miles at 5 miles an hour. Draw a graph showing the relation between the distance travelled and the time taken to cover that distance.

55. If two oranges cost 3 annas, find graphically (1) the cost of 7 oranges and (2) how many oranges can be had for Re. 1. 5 as.

56. A man starts walking at 10 A. M. at the rate of 5 miles an hour. After 2 hours his son cycles after him at the rate of 7 miles an hour. Find graphically when and where the son will overtake the father. [A. U. '43]

57. A train P starts from Howrah and runs at 30 miles an hour. Another train Q starts 20 minutes after P and runs on a parallel line at 50 miles an hour. (1) When and where will Q overtake P ? (2) How far will they be apart 12 minutes after Q starts ?

58. A walks at the rate of 4 miles an hour and takes rest for 18 minutes at the end of every hour. Two hours later B runs in the same direction at the rate of 6 miles an hour. Find graphically when and where they will meet. [N.U. '47]

59 A train starts from Howrah for Magra (30 miles distant) at 8-30 A.M. and travels at 40 miles an hour. Another train starts from Magra for Howrah at 8-45 A.M. and travels at 10 miles an hour. When and where do they meet ?

60. Two friends X and Y leave their places A and B respectively to meet each other. X starts at 9 A. M. and travels at 12 miles per hour, while Y starts at 11 A. M. and travels at 30 m. p. h. They meet at 12-20 P.M. Draw graphs of their travels and read from them the distance between A and B. [N. U. '48]

61. Two pipes can fill a cistern in 4 and 5 hours respectively. How long will they take to fill it if they are opened together ?

62. At noon A starts to cycle from P to Q a distance of 40 miles. He rides 6 miles an hour, resting for an hour after riding 12 miles. At 3 P. M. B starts from P at 10 miles an hour. Find graphically (*a*) when and where B overtakes A and (*b*) their distance apart at 5 P. M. [A. U. '45]

63. The salary of an officer increased each year by a fixed sum. After 5 years of service his salary is raised to Rs. 120 and after 12 years to Rs. 176. Draw a graph from which his salary may be read off for any year and determine from it (*i*) his initial salary and (*ii*) the salary he should receive for his 21st year. [D. B. '45]

64. The population of a town is given by the following table :

Year	1920	1930	1940	1950
Population in thousands	12	17	22	27

Find graphically the population of the town in 1945.

65. Given that 5 kilograms are approximately equal to 11 pounds, show graphically how to express any number of kilograms in pounds. Express from the graph 7·5 pounds in kilograms and 7 kilograms in pounds.

66. Draw a graph representing the squares of the numbers from 0 to 5.

Solve graphically :—

67. $x^2+y^2=41,\ y-2x=-3.$

68. $\frac{x^2}{4}+x-8=0.$

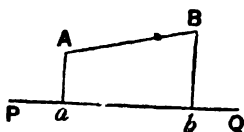
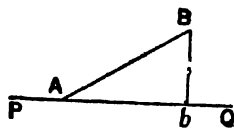
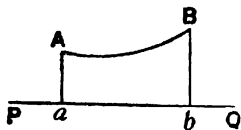
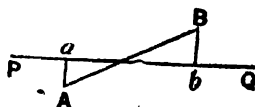
69. $\left.\begin{array}{r} x-2y=8 \\ xy=24 \end{array}\right\}$

70. $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=73 \\ xy=24 \end{array}\right\}$

71. Draw the graphs of (i) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$, plotting at least 8 points, and (ii) $x+y=5$, plotting at least 3 points, with the same axes of co-ordinates and same scale. Show from your graph that (ii) touches (i). Write down the co-ordinates of the point of contact. [W. B. S. F. 1959]

দ্বিতীয় অধ্যায়

জ্যামিতি

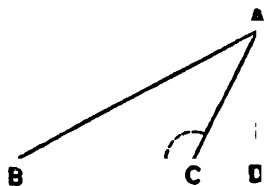
57. **অভিক্ষেপ** (Projection): বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্বপাত করিলে ঐ লম্বটির পাদবিন্দুকে ঐ সরলরেখার উপর উক্ত বহিঃস্থ বিন্দুর **অভিক্ষেপ** বলা হয়। চিত্র 'ক'-এ বহিঃস্থ A বিন্দু হইতে PQ সরলরেখার উপর Aa লম্ব টানা হইয়াছে সুতরাং PQ সরলরেখার উপর A বিন্দুর অভিক্ষেপ হইল a বিন্দু। চিত্র 'খ'-এ A বিন্দুর অভিক্ষেপ A বিন্দুই হইবে। কারণ, A বিন্দু PQএর উপর অবস্থিত।

কোন সরলরেখার উপর অন্য কোন সরলরেখার বা বক্ররেখার অভিক্ষেপ হইতে পারে। চিত্র 'ক'-এ মনে কর, PQ সরলরেখার উপর AB সরলরেখার দুই প্রান্তবিন্দু A ও B হইতে Aa ও Bb লম্ব টানা হইল। এখানে লম্ব দুইটি দ্বারা PQএর ছিন্ন অংশ abকে PQ সরলরেখার উপর ABর লম্ব অভিক্ষেপ বলে। চিত্র 'খ'-এ PQএর উপর ABর অভিক্ষেপ Ab হইয়াছে। অনুরূপে চিত্র 'গ'-এ abকে PQ সরলরেখার উপর AB বক্ররেখার লম্ব-অভিক্ষেপ বলা হয়।

লম্ব টানিয়া অভিক্ষেপ নির্ণয় করা হয় বলিয়া ঐ অভিক্ষেপকে লম্ব-অভিক্ষেপ (Orthogonal Projection) বলে।

উপপাদ্য 1

In an obtuse-angled triangle, the square on the side opposite to the obtuse angle is equal to the sum of the squares on the sides containing the obtuse angle together with twice the rectangle contained by one of those sides and the projection of the other side upon it.

[স্থূলকোণী ত্রিভুজে, স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র, উহার অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয় এবং ঐ দুই বাহুর যে-কোন একটি ও তাহার উপর অপর বাহুটির লম্ব-অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান হইবে।]

ABC ত্রিভুজের ∠ACB স্থূলকোণ। মনে কর, BC-র বর্ধিতাংশের উপর AD লম্ব টানা হইয়াছে। সুতরাং CD হইল BC-র উপর AC-র লম্ব-অভিক্ষেপ। এখানে স্থূলকোণের বিপরীত বাহু AB এবং অপর বাহুদ্বয় BC ও AC.

১নং চিত্র

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$.

প্রমাণ : $\because$ ∠D সমকোণ, $\therefore$ $AB^2 = AD^2 + BD^2$ এবং $AC^2 = CD^2 + AD^2$. আবার, $\because$ $BD = BC + CD$,

$$\therefore \quad BD^2 = (BC + CD)^2 = BC^2 + CD^2 + 2BC.CD;$$

$$\therefore \quad AB^2 = AD^2 + BD^2$$
$$= AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2BC.CD$$
$$= AC^2 + BC^2 + 2BC.CD.$$

উপপাদ্য 2

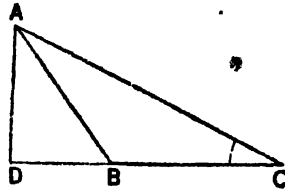
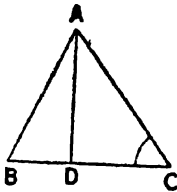
In any triangle, the square on the side opposite to an acute angle is equal to the sum of the squares on the other two sides diminished by twice the rectangle contained by

one of those sides and the projection of the other side upon it.

[যে কোন ত্রিভুজে, কোন সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি হইতে ঐ দুই বাহুর যে কোন একটি ও তাহার উপর অপর বাহুটির লম্ব-অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের অন্তরফলের সমান হইবে।]

ABC ত্রিভুজের $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ, AB উহার বিপরীত বাহু এবং অপর বাহুদ্বয় BC ও AC. মনে কর, BC-র উপর (প্রথম চিত্র) বা CB-র বর্ধিতাংশের উপর (দ্বিতীয় চিত্র) AD লম্ব টানা হইয়াছে , সুতরাং CD হইল BC-র উপর AC-র লম্ব অভিক্ষেপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD.$$

২নং চিত্র

প্রমাণ : $\because$ $\angle D$ সমকোণ, $\therefore$ $AB^2 = AD^2 + BD^2$ এবং $AC^2 = AD^2 + CD^2$.

আবার, $BD = BC - CD$, অথবা $BD = CD - BC$,

$\therefore$ $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC.CD.$

$\therefore$ $AB^2 = AD^2 + BD^2$

$= AD^2 + CD^2 + BC^2 - 2BC.CD$

$= AC^2 + BC^2 - 2BC.CD.$

[**দ্রষ্টব্য :** কোন ত্রিভুজে $\angle C$ সমকোণ হইলে $AB^2 = AC^2 + BC^2$,

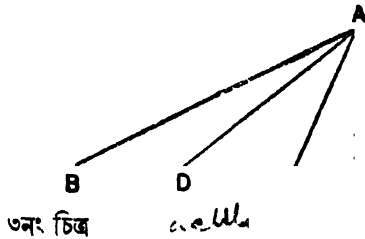
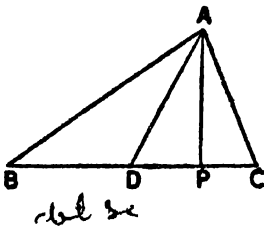
$\angle C$ স্থূলকোণ হইলে $AB^2 > AC^2 + BC^2$,

$\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হইলে $AB^2 < AC^2 + BC^2$.]

Apollonius' Theorem

In any triangle, the sum of the squares on two sides is equal to twice the square on half the third side together with twice the square on the median that bisects the third side.

ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমা BC বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।
প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB^2+AC^2=2BD^2+2AD^2$.

৩নং চিত্র

অঙ্কন : BC-র বা BC-র বর্ধিতাংশের উপর AP লম্ব টান।

প্রমাণ : মনে কর, AB ও AC অসমান, সুতরাং ADB ও ADC কোণ দুইটির মধ্যে একটি স্থূলকোণ এবং অপরটি সূক্ষ্মকোণ হইবে।

এখানে $\angle ADB$ স্থূলকোণ,

$\therefore$ $\triangle ABD$এ, $AB^2=AD^2+BD^2+2BD.PD$

এবং $\triangle ADC$এ, $AC^2=AD^2+CD^2-2CD.PD$

$=AD^2+BD^2-2BD.PD$ ($\because$ $CD=BD$)

$\therefore$ $AB^2+AC^2=2AD^2+2BD^2$.

বিবিধ সমাধান (1)

উদা. 1. Prove that a triangle whose sides are 2, 3 and 4 inches is an obtuse-angled triangle. [C. U. '33]

স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের সম্মুখীন বাহুই বৃহত্তম বাহু এবং ঐ বৃহত্তম বাহুর বর্গ অন্য দুই বাহুর উপর বর্গদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। এখানেও দেখা যাইতেছে যে $4^2=16$ এবং $3^2+2^2=13$ অর্থাৎ $4^2>(3^2+2^2)$.

$\therefore$ 4 ইঞ্চি বাহুর বিপরীত কোণটি স্থূলকোণ হইবে।

অতএব ত্রিভুজটি স্থূলকোণী।

উদা. 2. Prove that in an isosceles triangle of which the vertical angle is 120°, the square on the base is three times the square on either side. [C. U. 1916]

ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $AB = AC$ এবং $\angle A = 120°$. প্রমাণ করিতে হইবে যে, $BC^2 = 3AB^2$. C হইতে BA-র বর্ধিতাংশের উপর CD লম্ব টান। AD, BA-র উপর AC-র লম্ব অভিক্ষেপ হইল।

প্রমাণ : $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB.AD$ ($\because$ $\angle BAC$ স্থূলকোণ) $= 2AB^2 + 2AB.AD$. এখন, $\triangle ADC$র, $\angle D$ সমকোণ এবং $\angle CAD = 180° - 120° = 60°$, $\therefore$ $\angle ACD = 30°$, $\therefore$ $AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB$.
$\therefore BC^2 = 2AB^2 + 2AB.AD = 2AB^2 + 2AB.\frac{1}{2}AB = 2AB^2 + AB^2 = 3AB^2$.

উদা. 3. If DE is drawn parallel to the base BC of an isosceles $\triangle ABC$, prove that the difference of the squares on BE and CE is equal to the rectangle contained by BC and DE. [C. U. 1938]

$\triangle ABC$র $AB = AC$ এবং $DE \parallel BC$. প্রমাণ করিতে হইবে যে, $BE^2 - CE^2 = BC.DE$. D ও E হইতে BCর উপর DP ও ER লম্ব টান।

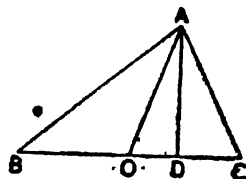
প্রমাণ : DERP একটি সামান্তরিক। $\therefore$ $DP = ER$ এবং $DE = PR$. $\triangle DBP$ ও $\triangle ERC$র $\angle P = \angle R, \angle B = \angle C$ এবং $DP = ER, \therefore PB = RC$.
এখন $\triangle BEC$র $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ বলিয়া $BE^2 = BC^2 + CE^2 - 2BC.CR$.

$$\therefore \quad BE^2 - CE^2 = BC^2 - 2BC.CR = BC(BC - 2CR)$$
$$= BC(BC - CR - BP) = BC.PR = BC.DE.$$

উদা. 4. In a $\triangle ABC$, AD is perpendicular drawn to the base BC and O is the middle point of BC. Prove that the difference $AB^2 - AC^2 = 2BC.OD$. [C.U. '30, '46, '51 , D.B. '41]

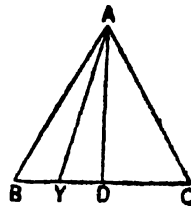
৪নং চিত্র

Hints : $\angle AOB > \angle D$, সুতরাং উহা স্থূলকোণ এবং $\angle AOC$ সূক্ষ্মকোণ।
এখন $AB^2 = AO^2 + BO^2 + 2BO.OD \cdots(1)$
$\triangle AOC$র, $AC^2 = AO^2 + CO^2 - 2CO.OD$
$= AO^2 + BO^2 - 2BO.OD$
($\because$ $BO = CO$)....(2)

এক্ষণে (1) হইতে (2) বিয়োগ করিলে
$AB^2 - AC^2 = 4BO.OD = 2.(2BO).OD = 2BC.OD$ ($\because$ $2BO = BC$.)

উদা. 5. ABC is an isosceles triangle and AY is drawn to cut the base internally at Y. Show that $AY^2 = AB^2 - BY.YC$.
[C. U. 1919, '47]

A হইতে BCর উপর AD লম্ব টান। △ABC সমদ্বিবাহু বলিয়া লম্ব AD, ভূমি BCকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল। এখন ∠D সমকোণ বলিয়া ∠B সূক্ষ্মকোণ। ∵ BD, ABর লম্ব অভিক্ষেপ,

$\therefore \quad AY^2 = AB^2 + BY^2 - 2BY.BD$

$= AB^2 - BY(2BD - BY)$

$= AB^2 - BY(BC - BY) = AB^2 - BY.YC.$

৫নং চিত্র

উদা. 6. The sum of the squares on the sides of a parallelogram is equal to the sum of the squares on its diagonals.
[C. U. 1931]

মনে কর, ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$.

প্রমাণ : ∵ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়, $\therefore AO = CO$, $BO = DO$. এখন △ABCতে $AB^2 + BC^2 = 2AO^2 + 2BO^2$, এবং △ADCতে, $AD^2 + CD^2 = 2AO^2 + 2DO^2$. $\therefore AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$
$= 4AO^2 + 2BO^2 + 2DO^2 = 4AO^2 + 4DO^2 \quad (\because BO = DO)$
$= (2AO)^2 + (2DO)^2 = AC^2 + BD^2$.

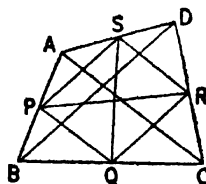
উদা. 7. In any quadrilateral the sum of the squares on the diagonals is equal to twice the sum of the squares on the joins of the middle points of the opposite sides.

P, Q, R, S যথাক্রমে ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD, DA বাহুর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$AC^2 + BD^2 = 2(PR^2 + QS^2)$.

প্রমাণ : AC, PR, QS, PQ, QR, RS, SP যোগ কর। △ABCর AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু P ও Q $\therefore AC = 2PQ$.

৬নং চিত্র

$\therefore AC^2 = 4PQ^2$. অনুরূপে $BD^2 = 4PS^2$. আবার, PQRS একটি সামান্তরিক,

$\therefore$ $PR^2+QS^2=PQ^2+QR^2+RS^2+SP^2=2PQ^2+2PS^2$. অতএব, $AC^2+BD^2=4PQ^2+4PS^2=2(2PQ^2+2PS^2)=2(PR^2+QS^2)$.

উদা. 8. Prove that the sum of the squares on the sides of a quadrilateral is equal to the sum of the squares on its diagonals together with four times the square on the line joining the middle points of the diagonals. [C. U. 1924]

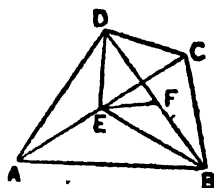
ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F. প্রমাণ করিতে হইবে $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4EF^2$.

EF, EB, ED যোগ কর।

৭নং চিত্র

প্রমাণ : ABC ত্রিভুজে BE মধ্যমা, $\therefore$ $AB^2+BC^2=2AE^2+2BE^2$. অনুরূপে ADC ত্রিভুজে $AD^2+DC^2=2AE^2+2DE^2$.

আবার EF, ত্রিভুজ EBDর মধ্যমা বলিয়া $EB^2+ED^2=2BF^2+2EF^2$

$\therefore$ $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=$ $2AE^2+2BE^2+2AE^2+2DE^2=4AE^2$ $+2(BE^2+DE^2)=4AE^2+2(2BF^2+2EF^2)=4AE^2+4BF^2+4EF^2$ $=(2AE)^2+(2BF)^2+4EF^2=AC^2+BD^2+4EF^2$.

উদা. 9. Three times the sum of the squares on the sides of a triangle is equal to four times the sum of the squares on the medians. [C. U. '33, '37]

$\triangle ABC$র AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $3(AB^2+BC^2+AC^2)=4(AD^2+BE^2+CF^2)$.

প্রমাণ : AD মধ্যমা বলিয়া $AB^2+AC^2=2BD^2+2AD^2$

অনুরূপে, $AB^2+BC^2=2CE^2+2BE^2$

এবং $BC^2+AC^2=2AF^2+2CF^2$

(যোগ করিয়া) $2(AB^2+BC^2+AC^2)=2BD^2+2CE^2+2AF^2+2(AD^2+BE^2+CF^2)$, $\therefore$ $4(AB^2+BC^2+AC^2)=4BD^2+4CE^2+4AF^2+4(AD^2+BE^2+CF^2)=(2BD)^2+(2CE)^2+(2AF)^2+4(AD^2+BE^2+CF^2)=BC^2+AC^2+AB^2+4(AD^2+BE^2+CF^2)$.

$\therefore$ $3(AB^2+BC^2+AC^2)=4(AD^2+BE^2+CF^2)$.

উদা. 10. If G be the centroid (মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু) of the $\triangle ABC$, show that $AB^2+BC^2+CA^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)$.

[9নং উদাহরণ অনুসারে] $3(AB^2+BC^2+AC^2)=4(AD^2+BE^2+CF^2)$ $=4\{(\frac{3}{2}AG)^2+(\frac{3}{2}BG)^2+(\frac{3}{2}CG)^2\}$ [$\because$ মধ্যমাত্রয় সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে ছেদ করে] $=4(\frac{9}{4}AG^2+\frac{9}{4}BG^2+\frac{9}{4}CG^2)=9(AG^2+BG^2+CG^2)$.

$\therefore$ উভয় পক্ষকে 3 দিয়া ভাগ করিয়া পাই

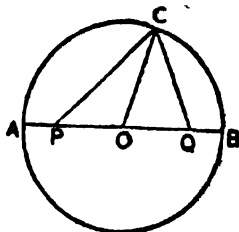
$AB^2+BC^2+AC^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)$

উদা. 11. ABCD is a rectangle and P any point within it. Prove that $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$. [C. U. '27]

[**Hints :** মনে কর, AC,BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিল। আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় সমান এবং পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়। $\therefore AO=DO$. PO, AP, PC, BP, DP যোগ কর। APC ত্রিভুজে AP^2+PC^2 $=2AO^2+2PO^2$; আবার, $\triangle PDB$তে $PB^2+PD^2=2DO^2+2PO^2$ $=2AO^2+2PO^2$ ($\because AO=DO$), $\therefore PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$].

উদা. 12. P and Q are two pts. on the diameter AB of a circle, equidistant from the centre ; if C is any point on the circumference, show that $PC^2+QC^2=AP^2+AQ^2$.

[**Hints :** $\because PO=QO$, $\therefore CO$, $\triangle PCQ$এর মধ্যমা। $\therefore PC^2+QC^2$ $=2CO^2+2PO^2=2AO^2+2PO^2$ ($\because AO=CO$). আবার, AP^2+AQ^2 $=(AO-PO)^2+(AO+OQ)^2$ $=(AO-PO)^2+(AO+PO)^2$ $=AO^2+PO^2-2AO.PO+AO^2+PO^2$ $+2AO.PO=2AO^2+2PO^2$.

$\therefore PC^2+QC^2=AP^2+AQ^2$.]

৮নং চিত্র

Exercise 1

1. If a straight line is bisected, prove that its projection is also bisected.

2. The projections of two equal and parallel st. lines on the same st. line are equal.

3. In a $\triangle ABC$, AD is drawn perpendicular to BC; if $AD^2 = BD.CD$, prove that $\angle BAC$ is a right angle. [B.U. '14]

[Hints : $AB^2 + AC^2 = BD^2 + AD^2 + CD^2 + AD^2$ ($\because \angle D$ সমকোণ)
$= BD^2 + CD^2 + 2AD^2 = BD^2 + CD^2 + 2BD.CD$
$= (BD + CD)^2 = BC^2$, $\therefore \angle BAC$ সমকোণ।]

4. The $\angle ACB$ of the $\triangle ABC$ is 120°,
show that $AB^2 = AC^2 + BC^2 + AC.BC$.

5. A point moves so that the sum of the squares on its distances from two fixed points is constant. Find the locus of the point.

6. A straight line AB is bisected at C and produced to D. Prove that $AD^2 - BD^2 = 4AC.CD$.

7. In $\triangle ABC$, if AB = AC and BD is perpendicular to AC, show that $BC^2 = 2AC.CD$.

8. Calculate the base of a triangle whose sides are 4 and 5 inches and whose median is 3·5 inches. [Ans. 5·7 ই.]

9. Prove that the area of the triangle ABC is $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ where $2s = a + b + c$.

অনুপাত ও সমানুপাত (Ratio and Proportion)

58. অনুপাত (Ratio)।

একই জাতীয় দুইটি বস্তুর মধ্যে একটি অপরটির কতগুণ বা কত অংশ তাহা যে সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তাহাকে ঐ বস্তু দুইটির অনুপাত বলে।

মনে কর, 6 ইঞ্চি ও 4 ইঞ্চি মাপের দুইটি সরলরেখা আছে। উহাদের দৈর্ঘ্যদ্বয়ের অনুপাত $\frac{6}{4}$ অর্থাৎ $\frac{3}{2}$ এই ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এইরূপ দুইটি একজাতীয় বস্তুর পরিমাণ a ও b একক হইলে উহাদের অনুপাত $\frac{a}{b}$ হইবে। এই অনুপাত লিখিতে হইলে $\frac{a}{b}$ অথবা $a : b$ এই ভাবে লেখা হয়।

$a : b$ এই অনুপাতের প্রথম রাশি a-কে **পূর্ব রাশি** (antecedent) এবং দ্বিতীয় রাশি b-কে **উত্তর রাশি** (consequent) বলে।

দ্রষ্টব্য : (1) দুইটি বস্তু একজাতীয় না হইলে তাহাদের অনুপাত নির্ণয় করা যায় না। যথা—দৈর্ঘ্যের সহিত ওজনের বা কোণের তুলনা অর্থাৎ অনুপাত হয় না। (2) অনুপাতটি একটি ভগ্নাংশ হইবে। যথা, 6 ইঞ্চি ও 4 ইঞ্চির অনুপাত হইবে $\frac{6}{4}$ বা $\frac{3}{2}$, কিন্তু $\frac{3}{2}$ ইঞ্চি নহে।

59. প্রমেয় ও অমেয় মান।

যে সকল রাশি কোন নির্দিষ্ট এককের গুণিতক তাহাদিগকে **প্রমেয়** (commensurable) বলে।

যদি দুইটি রাশিকে কোন একটি এককের দ্বারা পূর্ণরূপে মাপা যায়, তবে তাহারা প্রমেয় এবং তাহাদেব অনুপাত দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত হয়।

জ্যামিতিক অনুপাত সর্বদা উক্তরূপ হয় না। মনে কর, একটি বর্গক্ষেত্রের বাহু এক ইঞ্চি, সুতরাং উহার কর্ণ $\sqrt{2}$ ইঞ্চি হইবে। এখন দেখ $\sqrt{2}$ সংখ্যাটি কোন নির্দিষ্ট পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ দ্বারা ভাগ করা যায় না। এইরূপ মানকে **অমেয়** (incommensurable) বলে।

60. সমানুপাত (Proportion)।

a, b, c ও d এই রাশি চারিটি যদি এরূপ হয় যে, a ও bর অনুপাত c ও dব অনুপাতের সমান (অর্থাৎ $a : b = c : d$), তাহা হইলে ঐ চারিটি রাশিকে **সমানুপাতী** (proportional) বলে এবং ঐ অনুপাত দুইটিকে সমানুপাত বলে। এই সমানুপাতকে $a : b = c : d$ কিংবা $a : b :: c : d$ এইভাবে লেখা যায়।

এইরূপে যদি $a : b = b : c$ হয়, তবে a, b, cকে সমানুপাতী বলা যাইবে। a, b, c ও d সমানুপাতী হইলে দুই প্রান্তের রাশি দুইটিকে অর্থাৎ a ও dকে **প্রান্তীয়** (extremes) এবং মধ্যের রাশি দুইটিকে অর্থাৎ b ও cকে **মধ্যক** (means) বলে। আবার চতুর্থ রাশিকে প্রথম তিনটির **চতুর্থ সমানুপাতী** (fourth proportional) বলে।

a, b, c সমানুপাতী হইলে, দ্বিতীয় রাশি bকে (অর্থাৎ মধ্যের রাশিকে) প্রথম ও তৃতীয় রাশির **মধ্য সমানুপাতী** (mean proportional) বলে এবং $b^2 = ac$ হয়। এখানে cকে তৃতীয় সমানুপাতী (third proportional) বলা যায়।

দ্রষ্টব্য : সমানুপাতী রাশি চারিটির মধ্যে সবগুলি সমজাতীয় হইতে পারে, অথবা প্রথম দুইটি একজাতীয় এবং শেষ দুইটি অন্য প্রকারের সমজাতীয় হইতে পারে। যথা, 12 ইঞ্চি : 6 ইঞ্চি = 2 : 1, এবং 4 সের : 2 সের = 2 : 1, সুতরাং 12 ইঞ্চি : 6 ইঞ্চি = 4 সের : 2 সের।

∴ 12 ই., 6 ই., 4 সের ও 2 সের সমানুপাতী।

61. অনুপাত সম্বন্ধীয় কতকগুলি প্রক্রিয়া।

(1) **একান্তর প্রক্রিয়া** (Alternendo) :

যদি $a : b = c : d$ হয়, তবে $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ হইবে।

(2) **বিপরীত প্রক্রিয়া** (Invertendo) :

$a : b = c : d$ হইলে, $b : a = d : c$ হইবে।

(3) **যোগ প্রক্রিয়া** (Componendo) :

$a : b = c : d$ হইলে, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ হইবে।

(4) **ভাগ প্রক্রিয়া** (Dividendo) :

$a : b = c : d$ হইলে, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ হইবে।

(5) **যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া** (Componendo & Dividendo) :

$a : b = c : d$ হইলে, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ হইবে।

(6) **সংযোজন প্রক্রিয়া** (Addendo) :

$a : b = c : d = e : f = \cdots$ হইলে, প্রত্যেক অনুপাতটি $= \frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}$ হইবে।

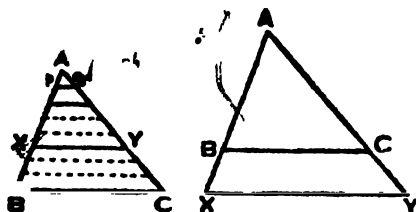
(7) **বজ্র গুণন প্রক্রিয়া** (Cross multiplication) :

$a : b = c : d$ হইলে, $ad = bc$ হইবে।

উপপাদ্য 3

A straight line drawn parallel to one side of a triangle cuts the other two sides, or those sides produced, proportionally.

[কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত সরলরেখা ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে সমানুপাতে বিভক্ত করে।]

[C. U. '42, '43, '45, '47, '48 ; D. B. '39, '41 ; G. U. '49, '51]

৯নং চিত্র

স্বীকার : মনে কর, △ABCতে BC বাহুর সমান্তরাল XY রেখা AB ও ACকে কিংবা AB ও ACর বর্ধিত অংশকে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AX : BX = AY : CY.

প্রমাণ : মনে কর, AX ও BX প্রমেয় এবং উভয়কে সাধারণ দৈর্ঘ্য p দ্বারা মাপা যায়, সুতরাং মনে কর, AX = $m.p$ এবং BX = $n.p$.

$$\therefore \frac{AX}{BX}=\frac{mp}{np}=\frac{m}{n}.$$

এক্ষণে, AX ও XBকে p দৈর্ঘ্যের সমান যথাক্রমে m ও n সংখ্যক অংশে ছেদ করে। প্রত্যেক ছেদবিন্দু হইতে BCর সমান্তরাল করিয়া সরলরেখা টান। তাহা হইলে উহারা AY ও YCকে যথাক্রমে m ও n সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করিবে। মনে কর, এই সমান অংশগুলি q দৈর্ঘ্য এককের সমান।

সুতরাং $\frac{AY}{YC}=\frac{m.q}{n.q}=\frac{m}{n}$ হইবে। অতএব, $\frac{AX}{BX}=\frac{AY}{CY}$.

[**অনুসিদ্ধান্ত :** $\because \frac{AX}{BX}=\frac{AY}{CY}$, $\therefore \frac{AX+BX}{BX}=\frac{AY+CY}{CY}$

বা, $\frac{AB}{BX}=\frac{AC}{CY}$. অনুরূপে, $\frac{AB}{AX}=\frac{AC}{AY}$ এবং $\frac{BX}{AX}=\frac{CY}{AY}$.]

উপপাদ্য 4

If a straight line cuts two sides of a triangle proportionally, it is parallel to the third side.

[যদি কোন সরলরেখা একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুকে সমানুপাতে বিভক্ত করে, তবে সেই সরলরেখা ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হইবে।]

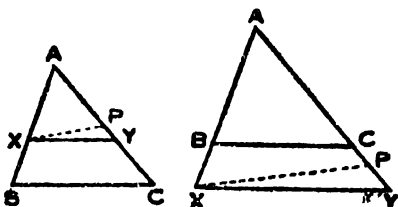
মনে কর, ABC ত্রিভুজে XY রেখা AB ও ACকে X ও Y বিন্দুতে এরূপে ছেদ করিয়াছে যে,

AX : XB = AY : YC.

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

XY ∥ BC.

১০নং চিত্র

প্রমাণঃ যদি XY রেখা BCর সমান্তরাল স্বীকার না করা হয়, তবে মনে কর XP ∥ BC টানা হইল এবং উহা ACকে P বিন্দুতে ছেদ করিল।

$$\because \quad XP \parallel BC, \quad \therefore \frac{AX}{BX} = \frac{AP}{PC},$$

কিন্তু $\frac{AX}{BX} = \frac{AY}{YC}$ (স্বীকার), $\therefore \frac{AP}{PC} = \frac{AY}{YC}$,

সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, AC রেখা P ও Y এই দুইটি বিভিন্ন বিন্দুতে একই অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে ; কিন্তু ইহা অসম্ভব।

$\therefore$ P ও Y একই বিন্দু হইবে। $\therefore$ XY ও BC সমান্তরাল।

[**দ্রষ্টব্য ঃ** উপরের প্রমাণে দেখ, $\frac{AP}{PC} = \frac{AY}{YC}$,

$\therefore \frac{AP+PC}{PC} = \frac{AY+YC}{YC}$ (১ম চিত্রে যোগক্রিয়া দ্বারা) $\therefore \frac{AC}{PC} = \frac{AC}{YC}$,

$\therefore PC = YC$, $\therefore$ P ও Y একই বিন্দু হইতে হইবে। আবার ২য় চিত্রে ভাগক্রিয়া দ্বারা $\frac{AP-PC}{PC} = \frac{AY-YC}{YC}$ করিয়াও ঐ সিদ্ধান্ত পাওয়া যায়।]

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যদি $\frac{AX}{BX} = \frac{AY}{CY}$ হয়, অথবা যদি $\frac{AB}{BX} = \frac{AC}{CY}$ হয়, কিংবা যদি $\frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$ হয়, তবে XY ∥ BC হইবে।

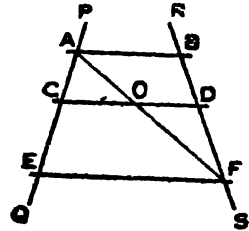
বিবিধ সমাধান (2)

উদা. 1. Prove that three parallel straight lines cut any two transversals proportionally.

[C. U. '15, '26, '39, '40 ; G. U. '49]

মনে কর, AB, CD ও EF সমান্তরাল সরলরেখা তিনটি PQ ভেদক হইতে AC ও CE অংশদ্বয় এবং RS ভেদক হইতে BD ও DF অংশদ্বয় ছিন্ন করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF}$.

১১নং চিত্র

AF যোগ কর ; উহা CDকে যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : $\triangle AEF$এ $\because CO \parallel EF$, $\therefore \frac{AC}{CE}=\frac{AO}{OF}$.

আবার, $\triangle ABF$এ, $\because OD \parallel AB$, $\therefore \frac{AO}{OF}=\frac{BD}{DF}$.

অতএব $\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF}$.

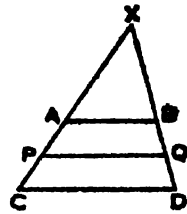
উদা. 2. Show that the straight line drawn through the middle point of one side of a triangle parallel to the base bisects the other side. [C. U. '23]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু X হইতে $XY \parallel BC$ টানা হইল। XY, ACকে Y বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AY=CY$.

প্রমাণ : $\because XY \parallel BC$, $\therefore \frac{AX}{BX}=\frac{AY}{CY}$, কিন্তু $AX=BX$ (স্বীকার)

$\therefore AY=CY$.

উদা. 3. Show that the straight line which joins the middle points of the oblique sides of a trapezium is parallel to the parallel sides. [D. B. '37, '41, '44]

মনে কর, ABDC ট্রাপিজিয়মের AC ও BD তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু P ও Q যোগ করা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, PQ রেখা AB ও CDর সমান্তরাল। CA ও DBকে বর্ধিত করিয়া X বিন্দুতে ছেদ করান হইল।

১২নং চিত্র

প্রমাণঃ ΔXCDর AB CD,

$$\frac{XA}{AC}=\frac{XB}{BD}, \text{ বা } \frac{XA}{2AP}=\frac{XB}{2BQ}, \text{ বা } \frac{XA}{AP}=\frac{XB}{BQ}, \quad \therefore AB \parallel PQ.$$

আবার, $\because$ AB $\parallel$ CD, $\therefore$ PQ $\parallel$ CD, $\therefore$ PQ $\parallel$ AB ও CD.

উদা. 4. In any triangle ABC, AB is bisected in D and CD is bisected in E. If AE is produced to meet BC in F, prove that FC=$\frac{1}{3}$BC. [D. B. '39]

AB বাহুর মধ্যবিন্দু D এবং CDর মধ্যবিন্দু E, বর্ধিত AE রেখা BCকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। DR $\parallel$ AF টান, উহা BCকে R বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে FC=$\frac{1}{3}$BC.

প্রমাণঃ ΔABFএর DR $\parallel$ AF,

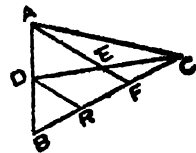
$\therefore \quad \frac{BD}{DA}=\frac{BR}{RF}$, কিন্তু DB=DA,

$\therefore$ BR=RF.

আবার, ΔCDRএর EF $\parallel$ DR,

$\therefore$ CE : DE=CF : RF,

১৩নং চিত্র

কিন্তু CE=DE, $\therefore$ CF=RF. $\therefore$ CF=RF=BR, $\therefore$ FC=$\frac{1}{3}$BC.

উদা. 5. Show how to divide a given straight line into three equal parts. [C. U. '29]

[Hints : মনে কর, AB সরলরেখাকে সমান তিন অংশে বিভক্ত করিতে হইবে। ABর সহিত যে কোন কোণ করিয়া AX সরলরেখা টান এবং AX হইতে যে-কোন তিনটি সমান অংশ AP, PQ, QR কাটিয়া লও। RB যোগ করিয়া P ও Q বিন্দু হইতে RBর সমান্তরাল করিয়া সরলরেখা টান। উহারা যেন, ABকে যথাক্রমে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন AB, C ও D

বিন্দুতে সমত্রিখণ্ডিত হইল। ∵ PC ∥ RB, ∴ AC : AB = AP : AR = $\frac{1}{3}$, ∴ AC = $\frac{1}{3}$AB. অনুরূপে CD ও DB প্রত্যেকে $\frac{1}{3}$AB হইবে।]

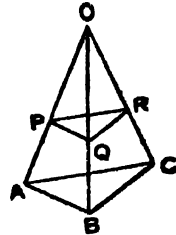
উদা. 6. In three straight lines OPA, OQB, ORC the points are so chosen that PQ is parallel to AB, QR is parallel to BC, neither P, Q, R nor A, B, C are collinear. Prove that PR is parallel to AC. [C. U. '47]

[যাহা দেওয়া আছে এবং কি প্রমাণ করিতে হইবে তাহা আগে লিখিবে]

১৪নং চিত্র

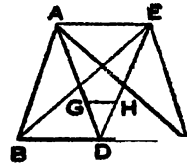
এখানে ∵ PQ ∥ AB, ∴ $\frac{OP}{AP}=\frac{OQ}{BQ}$.

আবার, ∵ QR ∥ BC, ∴ $\frac{OQ}{BQ}=\frac{OR}{CR}$

∴ $\frac{OP}{AP}=\frac{OR}{CR}$.

এক্ষণে, △OACতে ∵ $\frac{OP}{AP}=\frac{OR}{CR}$, ∴ PR ∥ AC.

উদা. 7. Find the locus of the centroid of a triangle standing on a given base and having a given area.

[C. U. '34, '42, '43, '45]

মনে কর, △ABCর ভূমি BC প্রদত্ত নির্দিষ্ট ভূমির সমান এবং উহার ক্ষেত্রফল প্রদত্ত ক্ষেত্রফলের সমান। AD ঐ ত্রিভুজের একটি মধ্যমা ও G উহার ভরকেন্দ্র। G বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

১৫নং চিত্র

মনে কর, △ABCর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট অন্য একটি △EBC একই BC ভূমির উপর একই পার্শ্বে অবস্থিত এবং উহার ভরকেন্দ্র H ; GH ও AE যোগ কর।

∵ একই ভূমির উপর △ABC ও △EBC সমান, ∴ AE ∥ BC.

আবার, ∵ ভরকেন্দ্রে প্রত্যেক মধ্যমা সমত্রিখণ্ডিত হয়, ∴ $\frac{DG}{DA}=\frac{1}{3}$

এবং $\frac{DH}{DE}=\frac{1}{3}$, ∴ $\frac{DG}{DA}=\frac{DH}{DE}$, ∴ GH ∥ AE, ∴ GH ∥ BC.

অতএব, $\triangle$ABCর A বিন্দুর যে কোন অবস্থানে ভরকেন্দ্র G বিন্দু GH সরলরেখার উপর থাকিবে। ∴ G বিন্দুর মধ্য দিয়া BCর সমান্তরাল সরলরেখাই G বিন্দুর সঞ্চারপথ।

উদা 8 OPQ is a straight line drawn to a fixed point O and is such that OP : OQ is constant. If P moves along a fixed straight line find the locus of Q [C U '27]

মনে কর O এই নির্দিষ্ট স্থির বিন্দুতে OPQ সরলরেখা এরূপে টানা হইয়াছে যে, OP : OQ ধ্রুবক। যদি P বিন্দু সর্বদা PX এই নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর বিচরণ করে, তবে Q বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

Q বিন্দু দিয়া QY ∥ PX টান মনে কর, PX রেখার A বিন্দু P র একটি অবস্থান OA যোগ কর এবং বর্ধিত কর উহা যেন QYকে B বিন্দুতে ছেদ করিল।

একণে, P ∥ QB,

∴ OA : OB = OP : OQ = ধ্রুবক।

১৬নং চিত্র

অতএব, P বিন্দুর অবস্থান A বিন্দুতে হইলে, তখন Q বিন্দুর অবস্থান QY-এর উপর B বিন্দুতে হইবে। ∴ Q বিন্দু দিয়া অঙ্কিত PX-এর সমান্তরাল সরলরেখাই Q বিন্দুর সঞ্চারপথ।

Exercise 2

1. In $\triangle$ABC, PQ is drawn parallel to BC cutting the other sides produced at P and Q If AB 4 2 cm , AC = 3 6 cm and AP = 6 3 cm , find the length of AO [উ: = 5·4 cm]

2. A series of parallel st lines cut any two transversals proportionally.

3. The straight line which joins the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side.

4. In $\triangle$ABC, E is the mid point of the median AD and BE produced cuts AC in F , prove that AF = $\frac{1}{3}$ AC

5. P and Q are any two points on two parallel st. lines. PQ is divided at X in a given ratio. Find the locus of the point X.

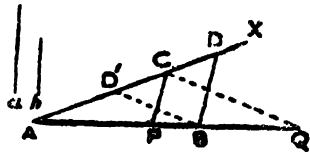
6. Two triangles ABC, DBC stand on the same side of the common base BC, and from any point E in BC lines are drawn parallel to BA, BD meeting AC, DC in F and G. Show that FG is parallel to AD. [G. U. '51]

সম্পাদ্য 1

To divide a given straight line nternally and externally in the ratio of two given straight lines.

মনে কর, AB সরলরেখাকে প্রদত্ত a ও b দৈর্ঘ্যদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করিতে হইবে।

১৭নং চিত্র

অঙ্কন : A বিন্দু দিয়া যে কোন একটি সরলরেখা AX টান। AX হইতে AC $=a$ একক, CD $=b$ একক এবং CA হইতে CD$'=b$ একক কাটিয়া লও। DB যোগ করিয়া DBর সমান্তরাল CP টান, উহা যেন ABকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে P বিন্দুতে AB রেখা $a:b$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হইল। আবার, D'B যোগ করিয়া CQ ‖ D'B টান, উহা যেন ABর বর্ধিতাংশকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। AB রেখা Q বিন্দুতে $a:b$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত হইল।

প্রমাণ : ∵ △ABDতে CP ‖ DB,

∴ AP : PB = AC : CD $=a:b$.

আবার, ∵ ABD'এ CQ ‖ D'B,

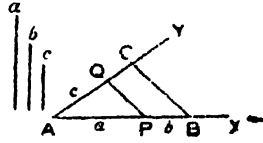
∴ AQ : QB = AC : CD$'=a:b$.

[**দ্রষ্টব্য :** এইরূপে যে-কোন সরলরেখাকে যে-কোন অনুপাতে বিভক্ত করা যায়। 3 : 2 অনুপাতে বিভক্ত করিতে হইলে, AC = 3 দৈর্ঘ্য একক এবং CD = 2 দৈর্ঘ্য একক লইতে হইবে।]

সম্পাদ্য 2

To construct the fourth proportional to three given straight lines.

মনে কর, a, b ও c তিনটি প্রদত্ত সরলরেখা। ইহাদের দৈর্ঘ্যের চতুর্থ সমানুপাতী একটি সরলরেখা অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন: AX যে-কোন একটি সরলরেখা লও। উহা হইতে AP $= a$ দৈর্ঘ্য একক এবং PB $= b$ একক কাটিয়া লও। AX-এর সহিত কোন কোণ করিয়া একটি সরলরেখা AY টান এবং উহা হইতে AQ $= c$ একক কাটিয়া লও।

১৮নং চিত্র

PQ যোগ করিয়া B বিন্দু হইতে PQ-এর সমান্তরাল করিয়া BC টান, উহা যেন AY-কে C বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে QC নির্ণেয় চতুর্থ সমানুপাতী হইল।

প্রমাণ: ∵ PQ ∥ BC, ∴ AP : PB = AQ : QC,

অর্থাৎ $a : b = c :$ QC.

∴ QC দৈর্ঘ্য a, b ও c-এর চতুর্থ সমানুপাতী।

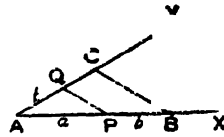
সম্পাদ্য 3

To find a third proportional to two given straight lines.

মনে কর, a ও b দুইটি সরলরেখা। ইহাদের তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।

অঙ্কন: যে-কোন সরলরেখা AX লও। উহা হইতে AP $= a$ দৈর্ঘ্য একক

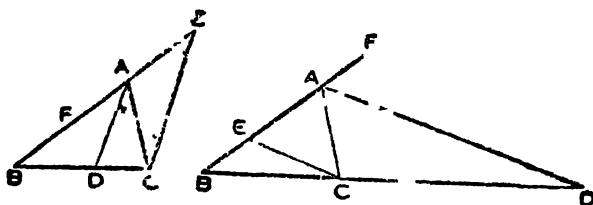
১৯নং চিত্র

এবং PB $= b$ দৈর্ঘ্য একক কাটিয়া লও। AX এর সহিত কোন কোণ করিয়া A বিন্দু হইতে একটি সরলরেখা AY টান এবং উহা হইতে AQ $= b$ একক কাটিয়া লও। PQ যোগ কর। BC ∥ PQ টান, উহা যেন AY-কে C বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে CQ নির্ণেয় তৃতীয় সমানুপাতী হইল।

প্রমাণ : PQ ∥ BC, AP : PB = AQ : QC,

অর্থাৎ $a : b = b :$ QC, ∴ QC দৈর্ঘ্য, a ও bএর তৃতীয় সমানুপাতী।

উপপাদ্য 5

The internal or external bisector of an angle of a triangle divides the opposite side internally or externally in the ratio of the other two sides. [C. U. '39, '41, '44, '46, '49 D. B. '48, '51, G. U. '48, '50, '52, W. B. S. B. '52]

[ত্রিভুজের কোন কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক বা বহিঃসমদ্বিখণ্ডক ঐ কোণের বিপরীত বাহুকে অপর দুই বাহুর অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত করে।]

২০নং চিত্র

ABC একটি ত্রিভুজ। ইহার BAC কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক AD রেখা BCকে D বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত করিয়াছে, এবং ঐ কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক AD রেখা BCর বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে বহির্বিভক্ত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.

অঙ্কন : C বিন্দু হইতে DAর সমান্তরাল করিয়া CE রেখা টান। উহা যেন BA বা BAর বর্ধিতাংশকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : ∵ DA ∥ CE, ∴ ∠DAC = একান্তর ∠ACE

এবং ∠BAD বা ∠FAD = অনুরূপ ∠AEC ;

কিন্তু ∠FAD = ∠CAD, ∴ ∠ACE = ∠AEC, ∴ AC = AE.

এক্ষণে, ∵ DA ∥ CE,

∴ BD : DC = BA : AE = BA : AC [∵ AE = AC

উপপাদ্য 6

If a straight line drawn from an angle of a triangle divides the opposite side internally or externally in the ratio of the other two sides, then the straight line is the internal or external bisector of the angle. [C. U. '42, D. B. '33]

[যদি ত্রিভুজের কোন শীর্ষ হইতে অঙ্কিত সরলরেখা বিপরীত বাহুকে অপর দুই বাহুর অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত বা বহির্বিভক্ত করে, তবে ঐ সরলরেখাটি ঐ শীর্ষস্থ কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক বা বহিঃসমদ্বিখণ্ডক হইবে।]

[পূর্ব উপপাদ্যের চিত্র আঁক] মনে কর ABC ত্রিভুজের A বিন্দু হইতে অঙ্কিত AD সরলরেখা BC বা বর্ধিত BC বাহুকে এরূপে ছেদ করিয়াছে যে $\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AC}$. প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD রেখা BAC কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক বা বহিঃসমদ্বিখণ্ডক

অঙ্কন : DA-র সমান্তরাল CE টান, উহা যেন BA বা বর্ধিত BA-কে E বিন্দুতে ছেদ করিল

প্রমাণ : $\because$ DA ∥ CE, $\therefore \frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AE}$

কিন্তু $\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AC}$ (স্বীকার)

$\therefore \frac{BA}{AE}=\frac{BA}{AC}$, $\therefore$ AE = AC, $\therefore$ $\angle ACE = \angle AEC$.

আবার, $\because$ DA ∥ CE, $\therefore$ $\angle DAC$ = একান্তর $\angle ACE$, এবং $\angle BAD$ বা $\angle FAD$ = অনুরূপ $\angle AEC$, কিন্তু $\angle ACE = \angle AEC$ (প্রমাণিত),

$\therefore$ $\angle DAC = \angle BAD$ বা $\angle FAD$, $\therefore$ AD রেখা BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

[**দ্রষ্টব্য :** যদি কোন সরলরেখা এরূপভাবে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত হয় যে তাহাদের অংশদ্বয়ের অনুপাত সমান, তবে সরলরেখাটি **সমঞ্জসভাবে** (harmonically) বিভক্ত হইয়াছে বলা হয়।]

বিবিধ সমাধান (3)

উদা. 1. The bisectors of the base angles of a triangle meet the opposite sides at X and Y respectively. If XY is parallel to the base, prove that the triangle is isosceles

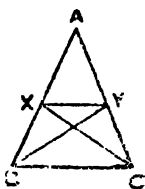
[C. U. '39 Sup.]

২১নং চিত্র

মনে কর, ABC ত্রিভুজের $\angle B$ ও $\angle C$এর সমদ্বিখণ্ডক BY ও CX বিপরীত বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে Y ও X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং XY ‖ BC.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\triangle ABC$ সমদ্বিবাহু।

প্রমাণ : $\because$ $\angle ABC$এর সমদ্বিখণ্ডক BY, $\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{AY}{CY}$.

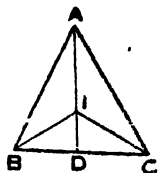
অনুরূপে $\because$ CX, $\angle ACB$এর সমদ্বিখণ্ডক, $\therefore \frac{AC}{BC}=\frac{AX}{BX}$.

আবার, $\because$ XY ‖ BC (স্বীকার), $\therefore \frac{AX}{BX}=\frac{AY}{CY}$.

অতএব, $\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{BC}$, $\therefore$ AB = AC. $\therefore$ $\triangle ABC$ সমদ্বিবাহু।

উদা. 2. Prove that the internal bisectors of the angles of a triangle meet at a point.

[C. U. '14 ; W. B. S. F. '52 ; D. B. '30, '44]

২২নং চিত্র

মনে কর, $\triangle ABC$র $\angle B$ ও $\angle C$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক BI ও CI পরস্পর I-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AI যোগ কর। প্রমাণ করিতে হইবে AI রেখা BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

AI-কে বর্ধিত করিয়া BCকে D বিন্দুতে ছেদ কর।

প্রমাণ : $\triangle ABD$তে $\because$ $\angle B$এর সমদ্বিখণ্ডক BI, $\therefore \frac{AB}{BD}=\frac{AI}{DI}$.

$\triangle ADC$তে $\because$ $\angle C$এর সমদ্বিখণ্ডক CI, $\therefore$ $\frac{AC}{CD}=\frac{AI}{DI}$.

$\therefore$ $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}$, $\therefore$ $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$. $\therefore$ AI, $\angle BAC$র সমদ্বিখণ্ডক।

উদা. 3. AD is a median of the $\triangle ABC$; and the angles ADB and ADC are bisected by lines which meet AB, AC at E and F respectively. Show that EF is parallel to BC.
[C. U. '37, '39, '42 ; D. B. '42, '51 ; G. U. '48]

[যাহা যাহা স্বীকার করা আছে তাহা আগে লিখিয়া লও।] EF যোগ কর।

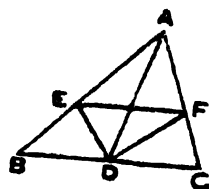
২৩নং চিত্র

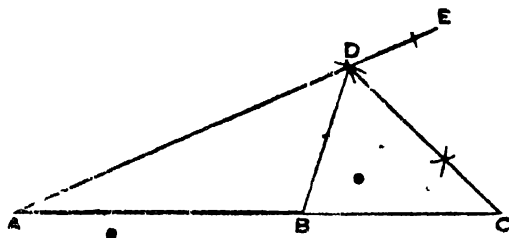
প্রমাণ : $\because$ DE, $\angle ADB$র সমদ্বিখণ্ডক,

$\therefore$ $\frac{AE}{BE}=\frac{AD}{BD}$.

আবার, $\because$ DF, $\angle ADC$র সমদ্বিখণ্ডক,

$\therefore$ $\frac{AF}{CF}=\frac{AD}{DC}=\frac{AD}{BD}$ ($\because$ BD = DC),

$\therefore$ $\frac{AE}{BE}=\frac{AF}{FC}$, $\therefore$ EF ∥ BC.

উদা. 4. Draw a straight line AB of length 4cm. and divide it externally at C in the ratio 5 : 2. [E. B. S. B. '49]

4 সেণ্টিমিটারের সমান AB সরলরেখা লও। A-কে কেন্দ্র করিয়া 5 সে. মি. ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক এবং B-কে কেন্দ্র করিয়া 2 সে.মি.

২৪নং চিত্র

ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্তচাপ আঁক। চাপ দুইটি যেন D বিন্দুতে ছেদ করিল। AD ও BD যোগ কর। $\angle ADB$র বহিঃসমদ্বিখণ্ডক (অর্থাৎ

$\angle$BDEএর অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক DC আঁক। উহা যেন ABর বর্ধিতাংশকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে AB রেখা C বিন্দুতে উদ্দিষ্টরূপে বিভক্ত হইল।

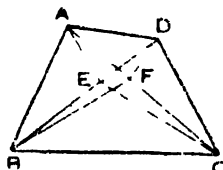
প্রমাণ : $\because$ $\angle$ADBর বহিঃসমদ্বিখণ্ডক DC,

$\therefore$ AC : BC = AD : DB = 5 : 2.

[দ্রষ্টব্য : সম্পাদ্য 1 এর সাহায্যে ইহার সমাধান করা সহজ]

উদা. 5. ABCD is a quadrilateral. Show that if the bisectors of the angles A and C meet on the diagonal BD, the bisectors of the angles B and D will meet on AC.

[C. U. '12, '38 ; G. U. '50]

মনে কর, ABCD চতুর্ভুজের $\angle$A ও $\angle$Cএর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় BD কর্ণের উপর E বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে এবং $\angle$Bএর সমদ্বিখণ্ডক BF যেন AC কর্ণকে F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। DF যোগ কর। প্রমাণ করিতে হইবে যে DF, $\angle$ADCএর সমদ্বিখণ্ডক।

২৫নং চিত্র

প্রমাণ : $\triangle$ABDএর $\angle$BADর সমদ্বিখণ্ডক AE,

$\therefore$ AB : AD = BE : DE. $\triangle$BCDতে CE, $\angle$BCDএর সমদ্বিখণ্ডক,

$\therefore$ BC : DC = BE : DE. $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{DC}$, $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{DC}$

আবার, $\because$ BF রেখা $\angle$ABCর সমদ্বিখণ্ডক, $\therefore$ $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AF}{CF}$,

সুতরাং $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{AF}{CF}$, DF রেখা $\angle$ADCর সমদ্বিখণ্ডক।

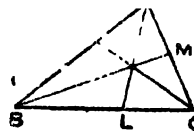
উদা. 6. The bisectors of the angles of the $\triangle$ABC intersect the sides BC, CA, AB at L, M, N respectively. Prove that BL.CM.AN = LC.MA.NB.

[C. U. '46]

[যাহা স্বীকার করা আছে তাহা আগে লিখ]

$\because$ $\angle$Aর সমদ্বিখণ্ডক AL, $\therefore$ $\dfrac{BL}{LC}=\dfrac{AB}{AC}$ ...(1)

$\because$ BM, $\angle$Bর সমদ্বিখণ্ডক, $\dfrac{CM}{AM}=\dfrac{BC}{AB}$ ...(2)

অনুরূপে $\dfrac{AN}{BN}=\dfrac{AC}{BC}$ ...(3).

২৬নং চিত্র

এক্ষণে (1), (2) ও (3) গুণ করিয়া পাই

$$\frac{BL}{CL}\cdot\frac{CM}{AM}\cdot\frac{AN}{BN}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{AC}{BC}=1,$$

$\therefore \quad BL.CM.AN = LC.MA.NB.$

উদা. 7. A point moves so that the ratio of its distances from two fixed points is constant, prove that the locus of the moving point is a circle.

[C. U. '21, '44, '49 ; D. B '31, '33, '46]

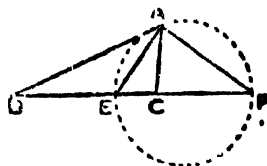
[**অথবা**, Given the base of a triangle and the ratio of the other two sides ; find the locus of the vertex.]

মনে কর, B ও C দুইটি নির্দিষ্ট স্থিরবিন্দু এবং A এরূপ একটি গতিশীল বিন্দু যে, ইহার সব অবস্থানে AB : AC = ধ্রুবক (নির্দিষ্ট অনুপাত)। প্রমাণ করিতে হইবে যে, A বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

অঙ্কন : ∠BAC-র অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক AE ও বহিঃসমদ্বিখণ্ডক AF টান, উহারা যেন BC-কে E ও F বিন্দুতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করিল।

২৭নং চিত্র

প্রমাণ : ∵ AE ও AF, ∠BAC-র সমদ্বিখণ্ডক,

$$\therefore \frac{BE}{CE}=\frac{BF}{CF}=\frac{AB}{AC}= \text{নির্দিষ্ট অনুপাত।}$$

সুতরাং BC রেখা E ও F বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে। এখন, B ও C স্থিরবিন্দু বলিয়া E ও F দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইবে। আবার, AE ও AF একই কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক ও বহিঃসমদ্বিখণ্ডক বলিয়া ∠EAF = 1 সমকোণ। ∴ A বিন্দুতে EF-এর সম্মুখকোণ সর্বদা এক সমকোণ হইবে। অতএব, EF-কে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তই A বিন্দুর সঞ্চারপথ।

[**দ্রষ্টব্য :** এই বৃত্তকে Circle of Apollonius বলে।]

উদা. 8. Construct a triangle having given the base, the vertical angle and the ratio of the other two sides.

মনে কর, ত্রিভুজটির ভূমি BC, শীর্ষকোণ A এবং AB : AC = $m : n$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

২৮নং চিত্র

অঙ্কন : BC ভূমিকে $m : n$ অনুপাতে E বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত কর। BCর উপর ∠A ধারণক্ষম BAC বৃত্তাংশ আঁক এবং বৃত্তটিকে সম্পূর্ণ কর। BAC চাপের অনুবন্ধী চাপকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। DE যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন পরিধিকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। AB ও AC যোগ কর। ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : ∵ চাপ BD = চাপ CD, ∴ ∠BAD = ∠CAD,

∴ AE, ∠BACর সমদ্বিখণ্ডক। ∴ AB : AC = BE : CE = $m : n$, এবং অঙ্কন অনুসারে ∠BAC = প্রদত্ত ∠A.

উদা. 9. If a straight line BC is divided harmonically at D and E and if DE subtends a right angle at any point A outside BC, then AD and AE are the internal and external bisectors of the angle between AB and AC.

মনে কর, BC সরলরেখা D ও E বিন্দুতে একই অনুপাতে (ধর $m : n$ অনুপাতে) যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত হইয়াছে এবং A বিন্দুতে DEর সম্মুখ কোণ DAE এক সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD ও AE যথাক্রমে BAC কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক ও বহিঃসমদ্বিখণ্ডক।

২৯নং চিত্র

অঙ্কন : C বিন্দু হইতে CG ∥ EA ও CF ∥ DA টান, উহারা যেন BA ও বর্ধিত BAকে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণঃ $\triangle BCF$এ, $\because AD \parallel CF$, $\therefore BA : AF = BD : DC$.

আবার, $\triangle BGC$তে $\because AE \parallel GC$, $\therefore BE : CE = BA : GA$.

কিন্তু $BD : DC = BE : CE$ (স্বীকার), $\therefore \frac{BA}{AF} = \frac{BA}{AG}$, $\therefore AF = AG$.

এক্ষণে, $\because$ ক্ষেত্র AC একটি সামান্তরিক এবং $\angle DAE$ সমকোণ,

$\therefore \angle GCF$ এক সমকোণ। অতিভুজ GF-এর মধ্যবিন্দু A বলিয়া $GA = AF = AC$. $\therefore \angle AGC = \angle ACG = \angle CAE$ (একান্তর)।

আবার, $\because CG \parallel EA$, $\therefore \angle FAE =$ অনুরূপ $\angle AGC$.

$\therefore \angle FAE = \angle CAE$. $\therefore$ AE, $\angle CAF$-এর সমদ্বিখণ্ডক, অর্থাৎ AE, $\angle BAC$র বহিঃসমদ্বিখণ্ডক।

আবার, $\angle GAD = \angle AFC = \angle ACF$ ($\because AC = AF$) $=$ একান্তর $\angle CAD$;

$\therefore$ AD, $\angle BAC$র অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক।

অতএব, AD ও AE যথাক্রমে $\angle BAC$র অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক ও বহিঃসমদ্বিখণ্ডক হইল।

Exercise 3

1. Apply theorem 5 to trisect a given straight line.

2. The external bisectors of two angles and the internal bisector of the third angle of a triangle are concurrent.

3. Prove that the base of a triangle is divided harmonically by the internal and external bisectors of the vertical angle.

[যদি কোন সরলরেখা একই অনুপাতে অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থভাবে বিভক্ত হয়, তবে উহাকে সমঞ্জসভাবে (harmonically) বিভক্ত হইয়াছে বলা হয়।]

4. The diagonals of a cyclic quadrilateral ABCD intersect at O ; if $BC = CD$, show that $BA : AD = BO : DO$.

5. X is the middle point of the side BC of the $\triangle ABC$ and the angles AXB, AXC are bisected externally by the

lines XE, XF which meet AB and AC produced at E and F respectively. Prove that EF ∥ BC. [C. U. '39]

6. If I is the in-centre of the △ABC and AI produced meets BC in D, then AI : ID = AB + AC : BC.

7. The two bisectors of the ∠A of the △ABC cut BC in P and Q. If X is the mid pt of BC, then XC^2 = PX.QX.

8. In an isosceles △ABC of which each of the base angles B and C is double of the ∠A, the bisector of the angle C meets AB at D. Prove that AB, BC and BD are three proportionals.

9. If a st. line AB be divided internally at C and externally at D in the same ratio $m : n$, and if Q be any point on the circle on CD as diameter, then QA : QB = $m : n$.

সদৃশ ত্রিভুজ (Similar Triangles)

62. **সদৃশকোণী ত্রিভুজ** (Equiangular triangles): কোন একটি ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে অন্য একটি ত্রিভুজের কোণগুলির সমান হইলে, ত্রিভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী ত্রিভুজ বলে। সুতরাং বুঝা গেল যে দুইটি করিয়া কোণ সমান জানা থাকিলেই ত্রিভুজদ্বয়কে সদৃশকোণী বলা যাইবে। কারণ, তখন তাহাদের তৃতীয় কোণগুলি অবশ্যই সমান হইবে।

63. **সদৃশ ত্রিভুজ** (Similar triangles): যদি দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হয় এবং তাহাদের অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাতত্রয় সমান হয়, তবে তাহাদিগকে সদৃশ ত্রিভুজ বলে। যে-কোণ যে-কোণের সহিত সমান, তাহাদের বিপরীত বাহুগুলিকে অনুরূপ বাহু ধরিতে হয়।

দ্রষ্টব্য : দুইটি বহুভুজও ঠিক অনুরূপ কারণে পরস্পর সদৃশকোণী ও সদৃশ হইয়া থাকে।

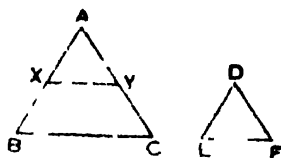
উপপাদ্য 7

It two triangles are equiangular, their corresponding sides are proportional. [C. U. '38, '41, '43, '47, '48, '51; G.U. '48, '50, '52; D.B. '40, '41, '43, '45, '50, '51]

[দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হইলে তাহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতিক হইবে।]

ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটির $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

১০নং চিত্র

অঙ্কন : AB ও AC হইতে DE ও DF-এর সমান করিয়া যথাক্রমে AX ও AY অংশ কাটিয়া লও। XY যোগ কর।

প্রমাণ : $\triangle AXY$ ও $\triangle DEF$-এর $AX = DE$, $AY = DF$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle A$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle D$, ∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

∴ $\angle AXY = \angle DEF = \angle ABC$ (স্বীকার),

∴ $XY \parallel BC$, ∴ $\frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$, অর্থাৎ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$.

অনুরূপে, BA ও BC হইতে যথাক্রমে ED ও EF-এর সমান অংশ কাটিয়া লইয়া প্রমাণ করা যায় যে, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ ∴ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$.

উপপাদ্য 8

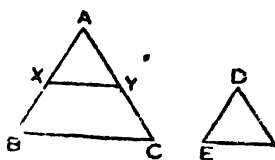
(উপপাদ্য 7-এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা)

If two triangles have their sides proportional, when taken in order, they are equiangular. [C. U. '42, '45; D. B. '32, '45]

[দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে সমানুপাতী হইলে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী হইবে।]

৩১নং চিত্র

স্বীকার : ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী অর্থাৎ $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$ এবং $\angle C=\angle F$.

অঙ্কন : AB হইতে DE-র সমান AX এবং AC হইতে DF-এর সমান AY কাটিয়া লও। XY যোগ কর।

প্রমাণ : $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$ (স্বীকার), $\therefore$ $\frac{AB}{AX}=\frac{AC}{AY}$, $\therefore$ XY ∥ BC.

$\therefore$ $\angle B=\angle AXY$ এবং $\angle C=\angle AYX$.

$\therefore$ ABC ও AXY ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী,

$\therefore$ $\frac{AB}{AX}=\frac{BC}{XY}$, কিন্তু $\frac{AB}{AX}=\frac{AB}{DE}$ ($\because$ AX = DE) $=\frac{BC}{EF}$ (স্বীকার।)

$\therefore$ $\frac{BC}{XY}=\frac{BC}{EF}$, $\therefore$ XY = EF.

এক্ষণে AXY ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের $\because$ AX = DE, AY = DF এবং XY = EF,

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। $\therefore$ $\angle AXY=\angle E$ ও $\angle AYX=\angle F$.

$\therefore$ $\angle B=\angle AXY=\angle E$ ও $\angle C=\angle AYX=\angle F$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশকোণী।

বিবিধ সমাধান (4)

উদা. 1. The line joining the middle points of any two sides of a triangle is parallel to the third side and is half of it.

[চিত্র আঁকিয়া লও] মনে কর, $\triangle ABC$-র AB বাহুর মধ্যবিন্দু D এবং AC-র মধ্যবিন্দু E. DE যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, DE ∥ BC এবং DE = $\frac{1}{2}$BC.

প্রমাণ : $\because$ D ও E যথাক্রমে AB ও ACর মধ্যবিন্দু,

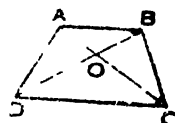
$\therefore \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$, $\therefore$ DE ∥ BC (প্রমাণিত হইল) । আবার, $\because$ DE ∥ BC,

$\therefore \angle ADE=\angle B$ এবং $\angle AED=\angle C$, সুতরাং $\triangle ADE$ ও $\triangle ABC$ সদৃশকোণী । $\therefore \frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$ ($\because AD=\frac{1}{2}AB$) $\therefore DE=\frac{1}{2}BC$.

উদা. 2. In the trapezium ABCD, AB is parallel to DC and the diagonals intersect at O, show that OA : OC= OB : OD=AB : CD. [C. U. '46]

৩২নং চিত্র

ABCD ট্রাপিজিয়মের AB ∥ DC এবং AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AO : OC=OB : OD =AB : DC.

প্রমাণ : AB ∥ DC,

$\therefore \angle BAO=$ একান্তর $\angle OCD$ এবং

$\angle ABO=$ একান্তর $\angle ODC$, $\therefore \triangle AOB$ ও $\triangle DOC$ সদৃশকোণী ।

$\therefore$ AO : OC=OB : OD=AB : DC.

উদা. 3 If through any point X within a circle two chords AB, CD are drawn and AC, BD are joined, show that AX : DX=CX : BX. [D. B. '40]

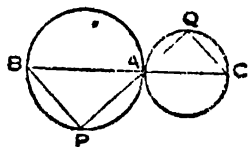
(নিজে চিত্র আঁকিয়া যাহা দেওয়া আছে তাহা আগে লিখ)

প্রমাণ : একই BC চাপের উপর পরিধিস্থ $\angle A=\angle D$, এবং $\angle AXC=$ বিপ্রতীপ $\angle DXB$, সুতরাং $\triangle ACX$ ও $\triangle DBX$ সদৃশকোণী ।

$\therefore$ AX : DX=CX : BX.

উদা. 4. Two circles touch one another at A externally and a straight line through A cuts them at P and Q. Prove that their diameters are as AP : AQ.

মনে কর, বৃত্ত দুইটি A বিন্দুতে পরস্পর বহিঃস্পর্শ করিয়াছে । A বিন্দু দিয়া PQ সরলরেখা টানা হইয়াছে, উহা যেন বৃত্ত দুইটির পরিধিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে । AB ও AC ব্যাস টান । প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB : AC=AP : AQ. BP ও CQ যোগ কর ।

প্রমাণ : ∵ বৃত্তদ্বয় A বিন্দুতে পরস্পর স্পর্শ করিয়াছে, ∴ উহাদের কেন্দ্রদ্বয় ও A বিন্দু এক সরলরেখায় অবস্থিত, অর্থাৎ AB ও AC এক সরলরেখায় অবস্থিত। এক্ষণে, ∠P ও ∠Q অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া প্রত্যেকে সমকোণ, এবং ∠BAP = বিপ্রতীপ ∠QAC.

৩৩নং চিত্র

∴ △ABP ও △AQC সদৃশকোণী।

∴ AB : AC = AP : AQ.

উদা. 5. Prove that the perimeters of any two similar triangles are in the ratio of any two corresponding sides [C. U. '46]

[চিত্র আঁকিয়া লও] মনে কর, ABC ও DEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের AB, AC ও BC বাহুগুলি যথাক্রমে DE, DF ও EF বাহুর অনুরূপ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\dfrac{\triangle ABC\text{এর পরিসীমা}}{\triangle DEF\text{এর পরিসীমা}} = \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$.

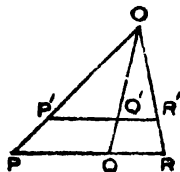
প্রমাণ : ∵ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ, ∴ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$.

∴ সংযোজনক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{AB+AC+BC}{DE+DF+EF} = \frac{\triangle ABC\text{এর পরিসীমা}}{\triangle DEF\text{এর পরিসীমা}}।$$

উদা. 6. Two parallel straight lines meet the straight lines OP, OQ, OR at P, Q, R and P', Q', R' respectively ; prove that PQ : QR = P'Q' : Q'R'. [C.U. '41 ; E. B. S. B. '51 ; G.U. '50]

(যাহা দেওয়া আছে তাহা আগে লিখ)

প্রমাণ : ∵ P'Q' ∥ PQ ∴ ∠OP'Q' = ∠OPQ ও ∠OQ'P' = ∠OQP, ∴ △OP'Q' ও △OPQ সদৃশকোণী। ∴ $\dfrac{P'Q'}{PQ} = \dfrac{OQ'}{OQ}$.

৩৪নং চিত্র

অনুরূপে, $\frac{OQ'}{OQ}=\frac{Q'R'}{QR}$ (∵ $\triangle OQ'R'$ ও $\triangle OQR$ সদৃশকোণী।

∴ $\frac{P'Q'}{PQ}=\frac{Q'R'}{QR}$, একান্তর ক্রিয়া দ্বারা $\frac{P'Q'}{Q'R'}=\frac{PQ}{QR}$.

উদা. 7. Any straight line drawn parallel to the base of a triangle is bisected by the line drawn from the vertex to the middle point of the base. [C. U. '14]

[৩৪ নং চিত্র দেখ] মনে কর, $\triangle OPR$ এর মধ্যমা OQ এবং $P'R'$ সরলরেখা PR এর সমান্তরাল। $P'R'$ যেন OQ কে Q' বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $P'Q'=Q'R'$.

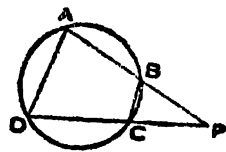
প্রমাণ : [উদা. 6এর মত প্রথমে প্রমাণ কর যে, $\frac{P'Q'}{Q'R'}=\frac{PQ}{QR}$.

এক্ষণে, ∵ $PQ=QR$ (স্বীকার), ∴ $P'Q'=Q'R'$.]

উদা. 8. ABCD is a cyclic quadrilateral, AB, DC are produced intersecting at P outside the circle. Prove that $PB : PD=PC : PA$. [C. U. '11, '48 ; E. B. S. B. '48]

[যাহা দেওয়া আছে তাহা আগে লিখিবে।]

প্রমাণ : ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB বাহুকে বর্ধিত করা হইয়াছে, ∴ বহিঃস্থ $\angle PBC=$ অন্তঃস্থ বিপরীত $\angle D$.

এখন $\triangle BPC$ ও $\triangle APD$ এর $\angle P$ সাধারণ এবং $\angle PBC=\angle D$, সুতরাং অবশিষ্ট কোণদ্বয় সমান।

৩৫নং চিত্র

∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, ∴ $\frac{BP}{PD}=\frac{PC}{AP}$

[**দ্রষ্টব্য :** সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহুগুলির অনুপাত সমান হয়। আর, যে যে কোণ সমান তাহাদের বিপরীত বাহুই অনুরূপ বাহু হয়। এখানে $\angle PBC=\angle D$ বলিয়া PC ও AP অনুরূপ বাহু হইল এবং $\angle BCP=\angle A$ বলিয়া PB ও PD অনুরূপ বাহু। যে ত্রিভুজের আগে উল্লেখ করিবে অনুপাত লিখিবার সময় তাহারই বাহুকে আগে লিখিতে হইবে।]

উদা. 9. ABCD is a parallelogram. From D a straight line is drawn to cut AB at E and CB produced at F. Show that DA : AE = BF : BE = FC : CD. [C. U. '38]

[যাহা দেওয়া আছে তাহা আগে লিখিয়া লও।]

৩৬নং চিত্র

প্রমাণ : $\angle AED$ = বিপ্রতীপ $\angle BEF$ এবং $\angle A$ = একান্তর $\angle EBF$, $\therefore$ তৃতীয় কোণদ্বয় সমান।

$\therefore$ $\triangle ADE$ ও BEF সদৃশকোণী।

$\therefore$ $\frac{AD}{BF}=\frac{AE}{BE}$, $\therefore$ একান্তর ক্রিয়া দ্বারা $\frac{AD}{AE}=\frac{BF}{BE}$.

আবার, $\triangle BEF$ ও $\triangle FDC$ সদৃশকোণী ($\because$ $\angle FEB$ = অনুরূপ $\angle FDC$, এবং $\angle EBF=\angle C$),

$\therefore$ $\frac{FB}{FC}=\frac{BE}{DC}$, $\therefore$ $\frac{BF}{BE}=\frac{FC}{CD}$. অতএব, $\frac{AD}{AE}=\frac{BF}{BE}=\frac{FC}{CD}$

উদা. 10. Prove that any chord of a circle is a mean proportional between its diameter and the perpendicular from either extremity of the chord upon the tangent at the other. [C U. '20]

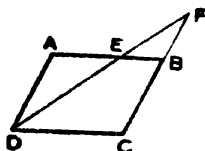
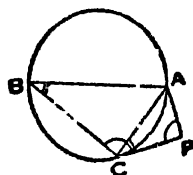
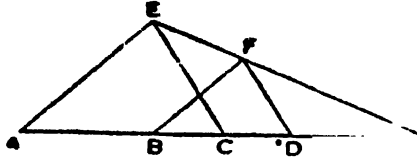
মনে কর, AC প্রদত্ত বৃত্তের একটি জ্যা, বৃত্তটির C বিন্দুতে PC একটি স্পর্শক এবং $AP \perp PC$. A বিন্দু দিয়া AB ব্যাস টানা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AP}$ (বা $AC^2 = AB.AP$).

BC যোগ কর।

৩৭নং চিত্র

প্রমাণ : $\angle ACB$ অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া সমকোণ এবং $\angle P$ সমকোণ।

$\because$ PC স্পর্শক এবং AC স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা, $\therefore$ $\angle ACP$ = একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle B$. অতএব, $\triangle ABC$ ও $\triangle APC$ সদৃশকোণী।

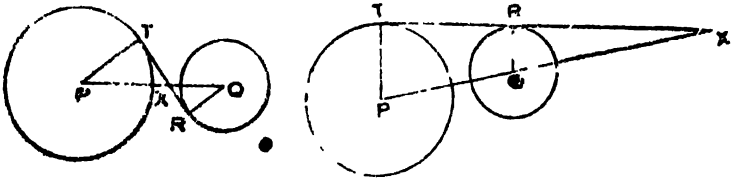
$\therefore$ $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AP}$.

উদা. 11. A, B, C and D are four points lying in order on a straight line. Find a point X on it such that XA : XB = XC : XD. [C. U. '42 ; E. B. S. B. '50]

৩৮নং চিত্র

মনে কর, A, B, C ও D বিন্দুগুলি একই সরলরেখায় অবস্থিত। ঐ সরল রেখার উপর এমন একটি X বিন্দু স্থাপন করিতে হইবে যেন XA : XB = XC : XD হয়।

অঙ্কন : ACর উপর যে কোন ত্রিভুজ AEC আঁক। B বিন্দু হইতে AEর সমান্তরাল এবং D বিন্দু হইতে CEর সমান্তরাল দুইটি সরলরেখা টান। উহারা যেন F বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। EF যোগ করিয়া বর্ধিত কর। উহা যেন ADর বর্ধিতাংশকে X বিন্দুতে ছেদ করিল। X নির্ণেয় বিন্দু হইল।

প্রমাণ : $\because$ BF ∥ AE, $\therefore \frac{AX}{BX} = \frac{EX}{FX}$

আবার, $\because$ DF ∥ CE, $\therefore \frac{CX}{DX} = \frac{EX}{FX}$. $\therefore \frac{AX}{BX} = \frac{CX}{DX}$.

উদা. 12. A common tangent to two circles cuts the line joining their centres, internally or externally, in the ratio of their radii.

৩৯নং চিত্র

মনে কর, বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র P ও Q, এবং উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক

TR কেন্দ্র-সংযোজক রেখা PQকে ১ম চিত্রে অন্তঃস্থভাবে এবং ২য় চিত্রে বহিঃস্থভাবে X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে, PX : QX = PT : QR. PT ও QR যোগ কর।

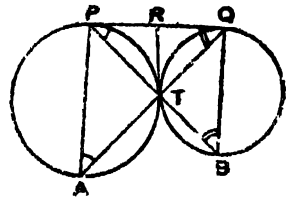
প্রমাণ : RT স্পর্শক বলিয়া ∠T = ∠QRX (সমকোণ), এবং ∠PXT = ∠RXQ, ∴ △PXT ও △QXR সদৃশকোণী

∴ PX : QX = PT : QR.

উদা. 13. If two circles touch externally, their common tangent is a mean proportional between their diameters.

মনে কর, দুইটি বৃত্ত T বিন্দুতে পরস্পর বহিঃস্পর্শ করিয়াছে এবং PQ উহাদের সাধারণ স্পর্শক। প্রমাণ করিতে হইবে যে, PQ বৃত্ত দুইটির ব্যাসদ্বয়ের মধ্য সমানুপাতী।

১০নং চিত্র

অঙ্কন : PT যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন পরিধিকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। QB যোগ কর। আবার, QT যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন পরিধিকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। PA যোগ কর।

প্রমাণ : ∵ বৃত্তদ্বয় T বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে, ∴ ঐ বিন্দুতে উভয়ের একটি সাধারণ স্পর্শক আছে। মনে কর, ঐ সাধারণ স্পর্শক TR, উহা PQকে R বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে, ∵ PR = RT, ∴ ∠RTP = ∠RPT. আবার, ∵ RT = RQ, ∴ ∠RTQ = ∠RQT.

∴ সমগ্র ∠PTQ = ∠TPQ + ∠PQT = $\frac{1}{2}$ × 2 সমকোণ = 1 সমকোণ।

∴ ∠PTA = 1 সমকোণ, ∴ উহা অর্ধবৃত্তস্থ কোণ, ∴ PA বৃত্তের ব্যাস।

অনুরূপে, ∠QTB = 1 সমকোণ, সুতরাং উহা অর্ধবৃত্তস্থ কোণ, ∴ QB বৃত্তের ব্যাস।

∵ PQ স্পর্শক এবং PT স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা,

∴ ∠QPT = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠A ; অনুরূপে, ∠PQT = একান্তর বৃত্তাংশস্থ ∠B.

এক্ষণে, ΔPAQ ও ΔPBQ এর $\angle AQP = \angle PBQ$ এবং $\angle PAQ = \angle BPQ$, .. ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী। $\therefore \frac{AP}{PQ} = \frac{PQ}{BQ}$.

PQ, বৃত্ত দুইটির AP ও BQ ব্যাসদ্বয়ের মধ্য সমানুপাতী হইল।

উপপাদ্য 9

If two triangles have one angle of the one equal to one angle of the other and the sides about the equal angles proportional, the triangles are similar.

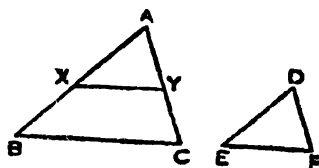
[C. U. '44, '46, 48, '50 ; D. B '37, '43, '45 ; G. U. '48]

[যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুর অনুপাত অপর কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুর অনুপাতের সমান হয়, এবং উক্ত বাহুগুলির অন্তর্ভূ´ত কোণ দুইটিও সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হইবে।]

ABC ও DEF ত্রিভুজের $\angle A = \angle D$

এবং $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ প্রমাণ করিতে হইবে যে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

s১নং চিত্র

অঙ্কন: AB হইতে DE র সমান করিয়া AX এবং AC হইতে DF এর সমান AY কাটিয়া লও। XY যোগ কর।

প্রমাণ: AXY ও DEF ত্রিভুজের $AX = DE$, $AY = DF$ এবং $\angle A = \angle D$,

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

. $\angle AXY = \angle DEF$ এবং $\angle AYX = \angle DFE$

আবার $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$, $\therefore \frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$, $\therefore XY \parallel BC$.

$\angle AXY =$ অনুরূপ $\angle B$. সুতরাং $\angle E = \angle B$.

অনুরূপে $\angle F = \angle C$. $\therefore$ ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী।

অতএব, ঐ ত্রিভুজদ্বয় পরস্পর সদৃশ।

বিবিধ সমাধান (5)

উদা 1 In equiangular triangles the medians make equal angles with the corresponding sides. [cf W B. S F '52]

মনে কর, ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটির $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ এবং AP ও DQ যথাক্রমে $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর মধ্যমা। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle APB = \angle DQE$.

প্রমাণ : প্রদত্ত ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী,

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{2BP}{2EQ} = \frac{BP}{EQ}$$

এক্ষণে, $\triangle ABP$ ও $\triangle DEQ$ এর $\angle B = \angle E$ এবং $AB : DE = BP : EQ$,

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ। $\therefore$ $\angle APB = \angle DQE$ এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে অন্য মধ্যমাগুলির পক্ষেও ইহা সত্য।

উদা 2 In a triangle ABC, AD is drawn perpendicular to the base If $BD : DA = DA : DC$, prove that the triangle ABC is a right-angled triangle. [C U '44 '48]

[যাহা স্বীকার করা আছে তাহা আগে লিখিয়া লও।]

প্রমাণ : $\triangle ABD$ ও $\triangle ADC$ এর

$\angle ADB = \angle ADC$ (সমকোণ বলিয়া) এবং

$BD : DA = DA : DC$ (স্বীকার),

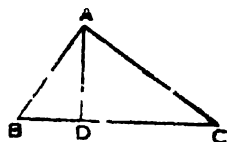
$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ,

$\angle B = \angle DAC$ এবং $\angle C = \angle DAB$

৪২নং চিত্র

$\therefore$ সমগ্র $\angle BAC = \angle DAB + \angle DAC = \angle B + \angle C$

$\therefore$ $\angle BAC$ = দুই সমকোণের অর্ধেক = এক সমকোণ,

$\triangle ABC$ সমকোণী ত্রিভুজ।

উদা 3 The altitudes of two similar triangles are proportional to their corresponding sides

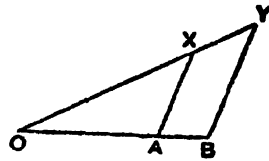
[চিত্র আঁকিয়া লও] মনে কর, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশ এবং $AM \perp BC$ ও $DN \perp EF$. প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\frac{AM}{DN} = \frac{BC}{EF}$

প্রমাণ : ΔABM ও ΔDEN এর $\angle B = \angle E$ (স্বীকার),
$\angle AMB = \angle DNE$ ($\because$ প্রত্যেকে সমকোণ), $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{AM}{DN} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}.$$

উদা. 4. OAB is a straight line, from A, B parallels AX and BY are drawn in the same sense so that OA : OB = AX : BY. Show that O, X and Y are collinear.

স্বীকার : OAB একটি সরল রেখা, AX ∥ BY এবং OA : OB = AX : BY.

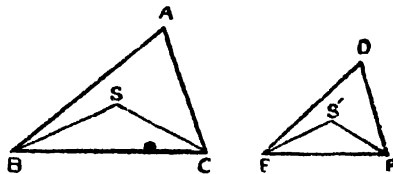
প্রমাণ করিতে হইবে যে O, X ও Y একই সরল রেখায় অবস্থিত।

৪৩নং চিত্র

OX এবং OY যোগ কর।

প্রমাণ : $\because$ AX ∥ BY, $\therefore$ $\angle OAX =$ অনুরূপ $\angle OBY$.

আবার, OA : OB = AX : BY (স্বীকার), $\therefore$ ΔOAX ও ΔOBY সদৃশ। $\therefore$ $\angle XOA = \angle YOB$. এক্ষণে, $\because$ OA, OB একই সরলরেখা, $\therefore$ OX ও OY সরলরেখাদ্বয়ও অর্থাৎ O, X, Y বিন্দুত্রয়ও একই সরল রেখায় অবস্থিত।

উদা. 5. The circum-radii of two similar triangles are proportional to their corresponding sides.

দ্রষ্টব্য : ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দু ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র হয় এবং ঐ ছেদবিন্দু হইতে উহার যে-কোন শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত দূরত্ব ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ অর্থাৎ পরিব্যাসার্ধ।

৪৪নং চিত্র

মনে কর, ABC ও DEF সদৃশ ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র S ও S′. BS ও CS এবং ES′ ও FS′ যোগ কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\dfrac{BS}{ES'} = \dfrac{BC}{EF}$

প্রমাণ : S বিন্দু $\triangle ABC$ এর পরিবৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া $BS = CS$ ($\because$ উহারা ব্যাসার্ধ)। আবার, $\because$ একই চাপের উপর $\angle BSC$ কেন্দ্রস্থ ও $\angle BAC$ পরিধিস্থ, $\therefore$ $\angle BSC = 2\angle A$.

অনুরূপে, $\triangle DEF$ এর $ES' = FS'$ এবং $\angle ES'F = 2\angle D$.

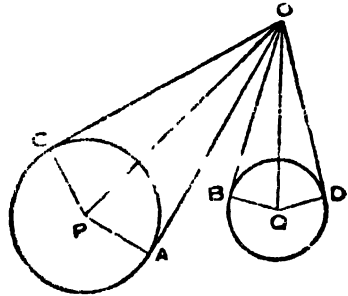
$\because$ $\triangle$ ABC ও $\triangle DEF$ সদৃশ, $\therefore$ $\angle A = \angle D$, $\therefore$ $\angle S = \angle S'$.

এক্ষণে, $\triangle BSC$ ও $\triangle ES'F$ এর $\angle S = S'$ এবং $\frac{SB}{SE} = \frac{SC}{S'F}$,

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ। $\therefore$ $\frac{BS}{ES'} = \frac{BC}{EF}$.

উদা. 6. If the ratio of the tangents drawn from a given point O to two given circles be equal to the ratio of the radii of the corresponding circles, show that the two circles will subtend equal angles at O. [C. U. '12]

মনে কর, O বিন্দু হইতে P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের যথাক্রমে OA ও OB স্পর্শক টানা হইয়াছে এবং $OA : OB = AP : BQ$. O বিন্দু হইতে বৃত্তদ্বয়ে দ্বিতীয় স্পর্শক OC ও OD টানা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle AOC = \angle BOD$. OP, PC এবং OQ, QD যোগ কর।

৪৫নং চিত্র

প্রমাণ : $\because$ AP ও BQ স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ, $\therefore$ $\angle A$ ও $\angle B$ প্রত্যেকে সমকোণ। $\triangle OAP$ ও $\triangle OBQ$ এর $\angle A = \angle B$ এবং $OA : OB = AP : BQ$, $\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ। $\therefore$ $\angle ACP = \angle BOQ$. অনুরূপে, $\triangle OPC$ ও $\triangle OQD$ সদৃশ, $\therefore$ $\angle COP = \angle DOQ$. $\therefore$ সমগ্র $\angle AOC =$ সমগ্র $\angle BOD$.

Exercise 4

1. If one of the parallel sides of a trapezium is double of the other, show that its diagonals cut each other at the point of trisection.

2. Any two medians of a triangle cut one another at a point of trisection.

3. The bases BC and EF of two similar triangles ABC, DEF are divided in the same ratio at X and Y. Prove that AX : DY = BC : EF. [G. U. '48]

4. ABCD is a parallelogram ; E and F are points in a st. line parallel to AB ; AE and BF meet at P, and DE and CF meet at Q. Prove that PQ ∥ AD. [H. S. Tech. 1960]

5. Find the locus of the middle point of a st. line parallel to the base of a triangle and terminated by the other two sides.

6. If two chords of a circle cut one another, the rectangle contained by the segments of the one is equal to the rectangle contained by the segments of the other.
[C. U. '51 ; G. U. '52]

7. Prove that in two similar triangles the corresponding medians, altitudes, circum-radii and in-radii are proportional.

8. From a point P outside a circle, a tangent PT and a secant PAB are drawn, the latter cuts the circle at A and B. Prove that $PT^2 = PA.PB$.

9. The bisector of the ∠A of the △ABC cuts BC in D and the circum-circle at P. Show that AB.AC = AP.AD.

10. In a △ABC, AD is perpendicular to BC and $AB^2 = BC.BD$; show that the ∠A is a right angle.

11. In △ABC, AD is perpendicular from A to BC. If BD, AD and CD be in continued proportion, then the angle BAC is a right angle. [C. U. '44]

12. ABCD is a parallelogram , a st. line drawn from A cuts BD, BC, DC in P, Q, R respectively. Prove that $AP^2 = PQ.PR$.

13. The bisector of the vertical ∠A of the △ABC meets the base at D and the circumference of the circum-circle at E. If EC is joined, show that AB.AC = AE.AD. [C. U. '37]

14. In two circles, if any two parallel radii are drawn (one in each circle), the st. line joining their extremities cuts the line of centres in one or other of two fixed points [C U. '17]

[চিত্র আঁক। মনে কর, বৃত্তদ্বয়ের AP ও BQ ব্যাসার্ধ পরস্পর সমান্তরাল এবং PQ রেখা ABকে X ও Y বিন্দুতে অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থভাবে ছেদ করিল। এক্ষণে AX : BX = AP : BQ এবং AY : BY = AP : BQ.

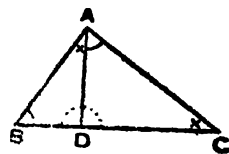
∵ AP ও BQ নির্দিষ্ট এবং A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া স্থির বিন্দু, ∴ X ও Y স্থির বিন্দু।]

দ্রষ্টব্য : দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র সংযোজক রেখা যে দুই বিন্দুতে বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত হয় তাহাদিগকে ঐ বৃত্তদ্বয়ের **সাম্যকেন্দ্র** (Centres of Similitude) বলে।

উপপাদ্য 10

In a right-angled triangle, if a perpendicular is drawn from the right angle to the hypotenuse, the triangles on each side of it are similar to the whole triangle and to one another. [C. U. '39, '43, '45 ; W. B. S. B. '53 ; D. B. '39]

[কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু হইতে অতিভুজের উপর লম্বপাত করিলে লম্বটির উভয় পার্শ্বে উৎপন্ন ত্রিভুজদ্বয় সমগ্র ত্রিভুজটির সহিত এবং পরস্পরের সহিত সদৃশ হইবে।]

ABC সমকোণী ত্রিভুজের ∠A সমকোণ। A বিন্দু হইতে অতিভুজ BCর উপর AD লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, △ABD ও △ADC সদৃশ এবং উহারা প্রত্যেকে △ABCর সহিত সদৃশ।

১৬নং চিত্র

প্রমাণ : △ABD ও △ABCএর ∠B সাধারণ কোণ এবং ∠ADB = ∠BAC (∵ প্রত্যেকে সমকোণ). ∴ অবশিষ্ট ∠BAD = অবশিষ্ট ∠ACB,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, সুতরাং উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতী।

∴ উহারা সদৃশ।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, △ADC ও △ABC সদৃশকোণী বলিয়া সদৃশ।

আবার, $\because$ $\triangle ABD$ ও $\triangle ADC$ প্রত্যেকে $\triangle ABC$র সহিত সদৃশকোণী, সুতরাং উহারা পরস্পর সদৃশকোণী। $\triangle ABD$ ও $\triangle ADC$ সদৃশ।

অনুসিদ্ধান্ত : (1) The perpendicular is a mean proportional between the segments of the hypotenuse.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD রেখা BD ও DCর মধ্য সমানুপাতী।

প্রমাণ : $\triangle ABD$ ও $\triangle ADC$ এর $\angle ADB = \angle ADC$ (সমকোণ), $\angle ABD = \angle CAD$ এবং $\angle BAD = \angle ACD$,

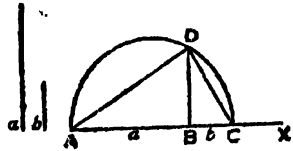
$\therefore \quad \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$, অর্থাৎ AD রেখা BD ও CDর মধ্য সমানুপাতী।

(2) $\triangle ABD$ ও $\triangle ABC$ সদৃশ বলিয়া $AB^2 = BC.BD$, অর্থাৎ AB রেখা BC ও BDর মধ্য সমানুপাতী।

(3) $\triangle ACD$ ও $\triangle ABC$ সদৃশ বলিয়া $AC^2 = BC.CD$, অর্থাৎ AC রেখা BC ও CDর মধ্য সমানুপাতী।

সম্পাদ্য 4

To find the mean proportional between two given straight lines. [C. U. '46]

মনে কর, a ও b দুইটি প্রদত্ত সরল রেখা। ইহাদের মধ্য সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।

অঙ্কন : যে কোন সরল রেখা AX লও। ইহা হইতে $AB = a$ এবং $BC = b$ কাটিয়া লও। ACকে ব্যাস করিয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর এবং $BD \perp AC$ টান। BD যেন অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। এই BD রেখা AB ও BCর মধ্য সমানুপাতী।

৪৭নং চিত্র

প্রমাণ : AD ও DC যোগ কর। $\angle ADC$ অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া সমকোণ। সমকৌণিক বিন্দু D হইতে অতিভুজ ACর উপর DB লম্ব।

$\therefore$ $\triangle ABD$, $\triangle DBC$ সদৃশ,

$\therefore \quad \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}, \quad \therefore \quad \frac{a}{BD} = \frac{BD}{b}, \quad \therefore$ BD, a ও bএর মধ্য সমানুপাতী।

[দ্রষ্টব্য : ৪৭নং চিত্র দেখ। মনে কর, AC ও AB প্রদত্ত রেখা এবং উহারা একটির উপর অপরটি এরূপে সমাপতিত যে উভয়ের A প্রান্ত মিলিত হইয়াছে। এরূপ ক্ষেত্রে AD রেখা AC ও ABর মধ্য সমানুপাতী হইবে। আবার, CD রেখা CB ও CAর মধ্য সমানুপাতী। সম্পাদ্য-4 দশম শ্রেণীর পাঠ্য।]

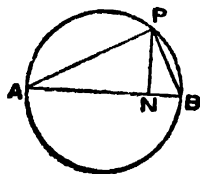
বিবিধ সমাধান (6)

উদা 1. The altitude AD of a $\triangle ABC$, right-angled at A, cuts BC in D. Prove that $BD : AD = AD : DC$. [C. U. '48]

[উপপাদ্য 10এর চিত্র আঁকিয়া প্রমাণ কর যে, $\triangle ABD$ ও $\triangle ADC$ সদৃশ।

$\therefore \quad BD : AD = AD : DC$]

উদা. 2. N is the foot of the perpendicular from a point P of the circle APB upon a diameter AB. Prove that $PB^2 = AB.NB$. [C. U. '39]

পরিধিস্থ P বিন্দু হইতে AB ব্যাসের উপর PN লম্ব টানা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $PB^2 = AB.NB$. AP ও BP যোগ কর।

প্রমাণ : $\because$ AB ব্যাস, $\therefore$ $\angle APB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া সমকোণ। আবার $PN \perp AB$,

$\therefore \quad \triangle APB$ ও $\triangle PNB$ সদৃশ।

৪৮নং চিত্র

$$\therefore \frac{AB}{PB} = \frac{PB}{NB}, \quad \therefore \quad PB^2 = AB.NB.$$

উদা. 3. If a perpendicular is drawn from the right angle of a right-angled triangle to the hyptenuse and if the sides of the right-angled triangle are in continued proportion, the greater segment of the hypotenuse is equal to the smaller side of the triangle. [C. U. '39]

[৪৬নং চিত্র আঁক] মনে কর, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ, অতিভুজ BCর উপর AD লম্ব এবং $AB : AC = AC : BC$. যদি ত্রিভুজটির AB বাহু ক্ষুদ্রতম হয় এবং $CD > DB$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $CD = AB$.

প্রমাণ : $\triangle ACD$ ও $\triangle ABC$ সদৃশ, $\therefore \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{AC}{BC}$,

কিন্তু $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{BC}$ (স্বীকার), $\therefore \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{AB}{AC} \quad \therefore \quad CD = AB$.

উদা. 4. Find geometrically the value of $\sqrt{5}$.

[৪৭নং চিত্র দেখ] AC = 5 একক লও। উহা হইতে AB = 1 একক কাটিয়া লও। AB ও ACর মধ্য সমানুপাতী AD অঙ্কন কর। এক্ষণে $\because$ AD রেখা AB ও ACর মধ্য সমানুপাতী, $\therefore$ $AD^2 = AB.AC = 5.1$ বা 5 বর্গ একক। $\therefore$ $AD = \sqrt{5}$ দৈর্ঘ্য একক। অতএব AD দৈর্ঘ্যই $\sqrt{5}$এর জ্যামিতিক মান।

[দ্রষ্টব্য : $\sqrt{15} = \sqrt{5 \times 3}$, সুতরাং 5 ও 3 এককের মধ্য সমানুপাতীই $\sqrt{15}$ এর মান হইবে। $\sqrt{34} = \sqrt{6\cdot8 \times 5}$ ধরিতে হয়।]

Exercise 5

1. Find the mean proportional between 3″ and 4″.

2. Find Geometrically the values of $\sqrt{35}$ and $\sqrt{26}$.

3. In a right-angled triangle, if a perpendicular be drawn from the right angle to the hypotenuse, the segments of the hypotenuse are in the duplicate ratio of the sides containing the right angle.

4. Two circles intersect at A and B, and at A tangents are drawn, one to each circle, to meet the circumferences at P and Q. Show that $AB^2 = BP.BQ$.

5. In $\triangle ABC$ and $\triangle DEF$, $\angle A = \angle D$; prove that $\triangle ABC : \triangle DEF = BA.AC : ED.DF$. [C. U. '47]

6. Two circles of radii r, p respectively touch externally at A, and a common tangent touches them at P and Q. Prove that $PQ^2 = 4pr$.

7. If two triangles have one angle of the one equal to one angle of the other, prove that the areas are proportional to the rectangles contained by the sides that include the angle. [W. B. S. F. '53]

উপপাদ্য 11*

The ratio of the areas of two triangles of equal altitude is equal to the ratio of their bases.

[সমান উচ্চতাবিশিষ্ট ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল উহাদের ভূমির সমানুপাতী হইবে।]

$\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর ভূমি BC ও EF এবং h উহাদের উচ্চতা।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$\triangle ABC : \triangle DEF = BC : EF.$

৪৯নং চিত্র

প্রমাণ : $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} BC.h$ এবং $\triangle DEF = \frac{1}{2} EF.h.$

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2}BC.h}{\frac{1}{2}EF.h} = \frac{BC}{EF}.$$

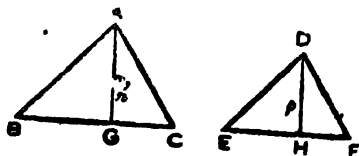
উপপাদ্য 12

The ratio of the areas of two similar triangles is equal to the ratio of the squares on corresponding sides.
[C. U. '36, '39, '40, '43, '45, '47, '48, '51 ; D. B. '39, '40, '41, '43, '45, '46, '48 ; G. U. '49, '51 ; S. F. '63]

Or, Similar triangles are to one another in the duplicate ratio of their homologus sides

[সদৃশ ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফলের অনুপাত উহাদের অনুরূপ বাহুর বর্গের অনুপাতের সমান হয়।]

মনে কর, ABC ও DEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ এবং উহাদের BC ও EF অনুরূপ বাহু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\triangle ABC : \triangle DEF = BC^2 : EF^2.$

৫০নং চিত্র

অঙ্কন : BC ও EF এর উপর যথাক্রমে AG ও DH লম্ব টান, এবং মনে কর, AG $=h$ একক এবং DH $=p$ একক। h ও p ত্রিভুজদ্বয়ের উচ্চতা।

প্রমাণ : $\triangle ABC = \frac{1}{2}BC\,h$ এবং $\triangle DEF = \frac{1}{2}EF.p$

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2}BC\,h}{\frac{1}{2}EF\,p} = \frac{BC\,h}{EF\cdot p}.$$

এক্ষণে, $\triangle ABG$ ও $\triangle DEH$ এর $\angle B = \angle E$ এবং $\angle AGB = \angle DHE$ (সমকোণ বলিয়া), $\therefore$ অবশিষ্ট $\angle BAG =$ অবশিষ্ট $\angle EDH$.

ঐ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, সুতরাং সদৃশ।

$$\therefore \frac{h}{p} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \quad (\because \triangle ABC \text{ ও } \triangle DEF \text{ সদৃশ।})$$

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{BC}{EF}\cdot\frac{h}{p} = \frac{BC}{EF}\cdot\frac{BC}{EF} = \frac{BC^2}{EF^2}.$$

[**দ্রষ্টব্য :** $\frac{a^2}{b^2}$ কে $\frac{a}{b}$ এর duplicate ratio বলে, Homologus = corresponding]

বিবিধ সমাধান (7)

উদা. 1 Show that every quadrilateral is divided by its diagonals into four triangles whose areas are proportional [D. B. '42]

মনে কর, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\triangle AOB : \triangle BOC = \triangle AOD : \triangle COD$.

প্রমাণ : $\triangle AOB$ ও $\triangle BOC$এর উচ্চতা একই,

$\triangle AOB : \triangle BOC = AO : CO$. অনুরূপে, $\triangle AOD : \triangle COD = AO : CO$ $\quad \triangle AOB : \triangle BOC = \triangle AOD : \triangle COD$.

উদা 2. Any triangle described on a diagonal of a square is double the similar triangle described on the side of the square.

[চিত্র আঁকিয়া লও।] মনে কর, ABCD বর্গক্ষেত্রের AC কর্ণ ও AB বাহুর উপর যথাক্রমে AEC ও ABF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ আঁকা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\triangle AEC = 2\triangle ABF$.

প্রমাণ : ∵ ΔAEC ও ΔABF সদৃশ,

$$\therefore \frac{\Delta AEC}{\Delta ABF}=\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{AB^2+BC^2}{AB^2} \quad (\quad \angle ABC \text{ সমকোণ })$$

$$=\frac{2AB^2}{AB^2}=2 \quad . \quad \Delta AEC=2\Delta ABF.$$

উদা. 3 ABC is a triangle right-angled at A and AD is drawn perpendicular to BC. Show that $\Delta ABD : \Delta ACD = AB^2 : AC^2$

[৪৬নং চিত্র আঁক] ΔABD ও ΔACD এর

$\angle ADB=\angle ADC$ (সমকোণ), $\angle B=\angle CAD$ এবং $\angle BAD=\angle C$, সুতরাং AB ও AC দুইটি অনুরূপ বাহু। ∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ

$$\therefore \Delta ABD : \Delta ACD=AB^2 : AC^2$$

উদা. 4. Show that any given triangle is divided into 4 equal parts by the st. lines joining the middle points of its sides. [C. U '11, '40]

[চিত্র আঁকিয়া লও] মনে কর, ΔABCর AB, BC ও ACর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F. DE, EF ও FD যোগ করা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, ΔADF, ΔBDE, ΔECF ও ΔDEF এর ক্ষেত্রফল সমান।

প্রমাণ : ∵ DF ∥ BC, ∴ $\angle ADF=$অনুরূপ $\angle B$ এবং $\angle AFD=$অনুরূপ $\angle C$. ∴ ΔADF ও ΔABC সদৃশ,

$$\therefore \frac{\Delta ADF}{\Delta ABC}=\frac{AD^2}{AB^2}=\frac{AD^2}{(2AD)^2}=\frac{AD^2}{4AD^2}=\frac{1}{4}.$$

∴ $\Delta ADE=\frac{1}{4}\Delta ABC$. অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, ΔDBE ও ΔECF প্রত্যেকে $=\frac{1}{4}\Delta ABC$, সুতরাং অবশিষ্ট $\Delta DEF=\frac{1}{4}\Delta ABC$.

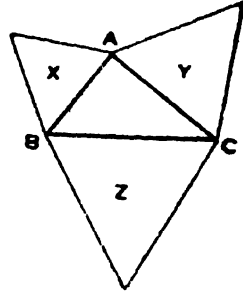
∴ ΔABC চারিটি সমান অংশে বিভক্ত হইয়াছে।

উদা. 5. Equilateral triangles are described on the sides of a right-angled triangle. Prove that the area of the

triangle on the hypotenuse is equal to the sum of the areas of the other two triangles. [C. U. '19, '21, '31]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ। ইহার AB, AC ও BC বাহুর উপর যথাক্রমে X, Y ও Z সমবাহু ত্রিভুজ আঁকা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $Z = X + Y$.

৫১ নং চিত্র

প্রমাণ : $\because$ X, Y ও Z তিনটি সমবাহু ত্রিভুজ, $\therefore$ উহাদের প্রত্যেক কোণ $60°$, সুতরাং উহারা সদৃশকোণী ও সদৃশ ত্রিভুজ।

$$\therefore \frac{X}{Z} = \frac{AB^2}{BC^2} \text{ এবং } \frac{Y}{Z} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

$$\therefore \frac{X}{Z} + \frac{Y}{Z} = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2},$$

অর্থাৎ $\frac{X+Y}{Z} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2}$ [$\because \angle A =$ সমকোণ] $= 1$.

$$\therefore X + Y = Z.$$

উদা. 6. Draw an equilateral triangle equal to the sum of two given equilateral triangles. [D. B. '46]

[**Hints :** মনে কর, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ দুইটি প্রদত্ত সমবাহু ত্রিভুজ। একটি সরল রেখা $PQ = BC$ লও। $PR \perp PQ$ টান, যেন $PR = EF$ হয়। QR যোগ কর, QR-এর উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজই নির্ণেয় ত্রিভুজ হইবে। প্রমাণের জন্য উপরে উদা. 5 দেখ।]

উদা. 7. Draw an equilateral triangle equal to the difference of two given equilateral triangles. [C. U '45]

[**Hints :** মনে কর, ABC ও DEF দুইটি প্রদত্ত সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যে $\triangle ABC$ বৃহত্তর। সরল রেখা $KM = EF$ লও এবং $MP \perp KM$ টান। K-কে কেন্দ্র করিয়া BC ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, উহা যেন MP-কে N বিন্দুতে ছেদ করিল। MN-এর উপর অঙ্কিত MNR সমবাহু ত্রিভুজই নির্ণেয় ত্রিভুজ।]

প্রমাণঃ এখানে ত্রিভুজ তিনটি সমবাহু হওয়ায় উহারা সদৃশকোণী ও সদৃশ।

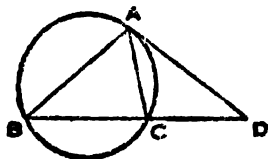
$\therefore \dfrac{\triangle ABC}{\triangle MNR} = \dfrac{BC^2}{MN^2}$ এবং $\dfrac{\triangle DEF}{\triangle MNR} = \dfrac{EF^2}{MN^2}$.

$\therefore \dfrac{\triangle ABC - \triangle DEF}{\triangle MNR} = \dfrac{BC^2 - EF^2}{MN^2} = \dfrac{KN^2 - KM^2}{MN^2}$

$= \dfrac{MN^2}{MN^2}$ ($\because \angle M$ সমকোণ) $= 1$. $\therefore \triangle MNR = \triangle ABC - \triangle DEF$.]

উদা. 8. ABC is a triangle inscribed in a circle. If the tangent at A meets BC produced in D, prove that

CD : BD $= AC^2 : AB^2$. [C. U. '28, '39, '51 ; G. U. '51]

$\triangle ABC$ বৃত্তস্থ, বৃত্তের A বিন্দুতে AD স্পর্শক। বর্ধিত BC, ঐ স্পর্শককে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে CD : BD $= AC^2 : AB^2$.

৫২নং চিত্র

প্রমাণ : $\triangle ACD$ ও $\triangle ABD$ এর $\angle D$ সাধারণ, এবং $\angle DAC =$ একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ABC$, $\therefore$ উহারা সদৃশ ত্রিভুজ।

$\therefore \triangle ACD : \triangle ADB = AC^2 : AB^2$. আবার, $\because$ $\triangle ACD$ ও $\triangle ABD$র উচ্চতা সমান, $\triangle ACD : \triangle ABD = CD : BD$.

অতএব, $CD : BD = AC^2 : AB^2$.

উদা. 9. Prove that the areas of similar triangles have the same ratio as the squares on corresponding medians.

[D. B. '38]

[চিত্র নিজে আঁক] মনে কর, ABC ও DEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের যথাক্রমে AG ও DH দুইটি মধ্যমা। প্রমাণ করিতে হইবে যে $\triangle ABC : \triangle DEF = AG^2 : DH^2$.

প্রমাণঃ $\because$ $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশ, $\therefore \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{2BG}{2EH} = \dfrac{BG}{EH}$.

এখন $\triangle ABG$ ও $\triangle DEH$এর $\angle B = \angle E$ এবং $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BG}{EH}$,

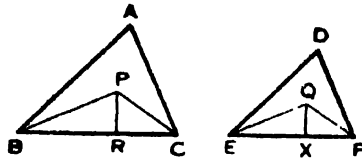
$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ, $\therefore \dfrac{AG}{DH} = \dfrac{AB}{DE}$.

এক্ষণে, $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{AG^2}{DH^2}$.

উদা. 10. If two triangles are similar, their areas are proportional to the squares on their corresponding altitudes.

[**Hints :** ধর h ও p দুইটি উচ্চতা। $\dfrac{h}{p} = \dfrac{BC}{EF}$, $\therefore \dfrac{h^2}{p^2} = \dfrac{BC^2}{EF^2} = \dfrac{\triangle ABC}{\triangle DEF}$.]

উদা. 11. Prove that similar triangles are to one another as the squares on the radii of their in-circles. [C. U. '40]

মনে কর, ABC ও DEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ, $\angle B$ ও $\angle C$এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে ছেদ করিল এবং $PR \perp BC$ টানা হইল। এখন P বিন্দু $\triangle ABC$র অন্তঃকেন্দ্র এবং PR অন্তর্ব্যাসার্ধ হইল। অনুরূপে $\triangle DEF$এর Q অন্তঃকেন্দ্র এবং QX অন্তর্ব্যাসার্ধ।

৫৩নং চিত্র

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\triangle ABC : \triangle DEF = PR^2 : QX^2$.

প্রমাণ : $\angle PBC = \frac{1}{2} \angle ABC$ এবং $\angle QEF = \frac{1}{2} \angle DEF$, কিন্তু $\angle ABC = \angle DEF$, $\therefore \angle PBC = \angle QEF$; অনুরূপে $\angle PCB = \angle QFE$. $\therefore \triangle PBC$ ও $\triangle QEF$ সদৃশকোণী। $PB : QE = BC : EF$. আবার $\triangle BPR$ ও $\triangle EQX$এর $\angle PBR = \angle QEX$ এবং $\angle PRB = \angle QXE$ (সমকোণ), . ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী, $\therefore PR : QX = BP : QE$.

অতএব, $PR : QX = BC : EF$. এক্ষণে, $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \dfrac{BC^2}{EF^2} = \dfrac{PR^2}{QX^2}$.

উদা. 12. Prove that similar triangles are to one another as the squares on the radii of their circum-circles. [C. U. '30, '36 ; D. B. '43]

[বিবিধ সমাধান (4)এর উদা. 5 দেখ। ঐ অনুসারে প্রথমে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{SB}{S'E} = \dfrac{BC}{EF}$. $\therefore \triangle ABC : \triangle DEF = BC^2 : EF^2 = SB^2 : S'E^2$.]

উদা. 13. If DE is drawn parallel to the base BC of a triangle ABC and if AD : DB = 3 : 2, find the ratio of $\triangle$ADE : fig. DBCE. [চিত্র আঁকিয়া লও]

$\because \frac{AD}{DB}=\frac{3}{2}, \therefore \frac{DB}{AD}=\frac{2}{3}, \therefore \frac{DB+AD}{AD}=\frac{2+3}{3}, \therefore \frac{AB}{AD}=\frac{5}{3}.$

এক্ষণে, $\because$ DE ∥ BC, $\therefore \angle ADE = \angle B, \quad \angle AED = \angle C,$

$\therefore$ ত্রিভুজ ABC ও DEF সদৃশকোণী, সুতরাং সদৃশ।

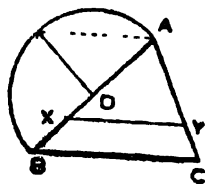
$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle ADE}=\frac{AB^2}{AD^2}=\frac{5^2}{3^2}=\frac{25}{9}; \therefore \frac{\triangle ABC-\triangle ADE}{\triangle ADE}=\frac{25-9}{9}$

$\therefore \frac{\text{ক্ষেত্র DBCE}}{\triangle ADE}=\frac{16}{9}, \quad \therefore \triangle ADE : \text{ক্ষেত্র DBCE} = 9 : 16.$

উদা. 14. Bisect a triangle by a straight line drawn parallel to the base. [C. U. '16, '32, '50, D. B. '46]

ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। ভূমি BC-র সমান্তরাল সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

৫৪নং চিত্র

অঙ্কন : ABকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। AD ও ABর মধ্য সমানুপাতীর সমান AX অংশ কাটিয়া লও। X হইতে BCর সমান্তরাল XY টান, উহা যেন ACকে Y বিন্দুতে ছেদ করিল। ABC ত্রিভুজ XY দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইল।

প্রমাণ : $\because$ XY ∥ BC, $\therefore$ $\triangle$AXY ও $\triangle$ABC সদৃশকোণী, সুতরাং উহারা সদৃশ। আবার, $\because$ AX, AD ও ABএর মধ্যসমানুপাতী, $\therefore AX^2 = AD.AB.$

এক্ষণে, $\frac{\triangle AXY}{\triangle ABC}=\frac{AX^2}{AB^2}=\frac{AD.AB}{AB^2}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$ ($\because$ D, ABর মধ্যবিন্দু)

$\therefore$ $\triangle AXY = \frac{1}{2}\triangle ABC$; সুতরাং $\triangle$ABC, XY দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

Exercise 6

1. The area of the $\triangle$ABC is 19·6 sq. cm. and XY, drawn parallel to BC, cuts AB in the ratio 4 : 3. Find the area of the $\triangle$AXY. [উত্তর : 6·4 sq. cm.]

2. Two equiangular triangles have areas in the ratio of 3 : 2 and an altitude of the greater is 5·2 cm. What is the corresponding altitude of the other ? [C. U. '35]

3. If PQ is drawn parallel to BC, the base of the $\triangle$ABC, and if $\triangle$APQ : fig. PBCQ = 4 : 5, show that AP : BP = 2 : 1.

4. Show how to draw a st. line XY parallel to BC, the base of a triangle ABC, so that the area of the $\triangle$AXY may be $\frac{9}{16}$th of the $\triangle$ABC. [C. U. '26]

5. A trapezium ABCD has its sides AB, CD parallel and its diagonals intersect at P. If AB is double of CD, find the ratio of the $\triangle$APB to the $\triangle$PCD.

6. Triangles on the same base are to one another as the segments into which the join of their vertices is divided by the base.

7. Two triangles stand on equal bases and between the same parallels and a st. line is drawn parallel to their bases, show that it cuts off equal areas from the two triangles.

8. Prove that if similar triangles are drawn on the sides of a right-angled triangle, the area of the triangle described on the hypotenuse is equal to the sum of the areas of the other two triangles. [C. U. 45, '48]

9. The sides DA, CB of a cyclic quadrilateral ABCD are produced to meet in O. If AB = $\frac{1}{2}$ CD, then the quadrilateral is three times the triangle OAB.

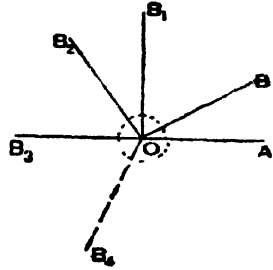
10. $\triangle$DEF is the pedal triangle of the $\triangle$ABC. Prove that $\triangle ABC : \triangle DBF = AB^2 : BD^2$. [W. B. S. F. '50]

11. Bisect a triangle by a straight line perpendicular to one of the sides.

তৃতীয় অধ্যায়

Trigonometry (ত্রিকোণমিতি).

64. **ত্রিকোণমিতি**—ত্রিভুজের তিনটি কোণ থাকায় উহাকে 'ত্রিকোণ'ও বলা যায়। গণিতশাস্ত্রের যে শাখায় সমতলে অঙ্কিত ত্রিভুজের তিনটি কোণ ও তিনটি বাহুব পরিমাপ ও সম্বন্ধ বিষয়ে আলোচনা করা হইয়াছে তাহাকে 'ত্রিকোণমিতি' বলে। ইহা জ্যামিতির একটি বিশিষ্ট শাখা। ইহার আলোচ্য বিষয় অধিকতর ব্যাপক।

65. **জ্যামিতিক ও ত্রিকোণমিতিক কোণ**—ত্রিকোণমিতিক কোণ জ্যামিতিক কোণ অপেক্ষা অধিকতর ব্যাপক। মনে কর, OB সরল রেখা Oকে কেন্দ্র করিয়া OA অবস্থান হইতে ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘোরে তাহার বিপরীত দিকে (anti-clockwise) ঘুরিতে লাগিল। OB প্রথমে AOB সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করিয়া যখন OAএর সহিত লম্বভাবে দাঁড়াইবে তখন AOB_1 কোণটি সমকোণ (90°) হইবে। OB আরও কিছু ঘুরিয়া গেলে AOB_2 কোণটি স্থূলকোণ হইবে। এইভাবে ঘুরিয়া OB যখন OAএর ঠিক বিপরীত দিকে এক সরল রেখায় অবস্থিত হইবে তখন AOB_3 কোণটি সরল কোণ বা দুই সমকোণ (180°) হইবে। আরও ঘুরিলে AOB_4 কোণটি প্রবৃদ্ধ কোণ (Reflex angle) হইবে। আর OB যখন সম্পূর্ণ একবার ঘুরিয়া OA-এর সহিত মিলিত হইবে, তখন সমগ্র AOB কোণটি চার সমকোণ (360°) উৎপন্ন করিবে।

১নং চিত্র

জ্যামিতিতে আমরা এই পর্যন্ত কোণের আলোচনা করিয়া থাকি, এবং এই পর্যন্ত জ্যামিতিক ও ত্রিকোণমিতিক কোণের মধ্যে কোন অমিল নাই।

এখন যদি মনে করি যে, OB রেখাটি সম্পূর্ণ একপাক অপেক্ষা কিছু বেশী ঘুরিয়া পূর্বের OB অবস্থানে গেল, তখন যে AOB কোণটি উৎপন্ন হইল, তাহা 4 সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। ত্রিকোণমিতিতে এইভাবে ক্রমশঃ আরও বৃহত্তর কোণ উৎপন্ন হইতে পারে ; কিন্তু জ্যামিতিতে 4 সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কোণ ধরা হয় না।

66. ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ—পূর্বে দেখানো হইয়াছে যে OB রেখা ঘড়ির কাঁটার বিপরীতক্রমে (anti-clockwise) ঘুরিয়া কোণগুলি উৎপন্ন করিয়াছে। এই কোণগুলিকে **ধনাত্মক** (positive) কোণ বলে। আবার OB রেখা ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে সেইদিকে ঘুরিলে যে কোণগুলি উৎপন্ন হয় সেইগুলিকে **ঋণাত্মক** (negative) কোণ বলা হয়।

67. কোণের পরিমাণ—কোন কোণের মান বা পরিমাণ নির্ণয়ের তিনটি প্রণালী (system) আছে। যথা—(1) **ষষ্টিক পদ্ধতি** (sexagesimal system), (2) **শতক পদ্ধতি** (centesimal system), (3) **বৃত্তীয় পদ্ধতি** (circular system)।

68. ষষ্টিক পদ্ধতি—সমকোণ একটি ধ্রুবক কোণ। এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে কোণের একক ধরা হয় এবং উহাকে 90 সমান ভাগে বিভক্ত করিলে প্রতি অংশ এক **ডিগ্রী** (degree) হয়। এক ডিগ্রীকে 60 সমান ভাগ করিলে প্রতি ভাগকে এক **মিনিট** (minute) এবং এক মিনিটের 60 সমান ভাগের এক ভাগকে এক সেকেণ্ড (second) বলা হয়।

60″ সেকেণ্ড $=1'$ মিনিট
60′ মিনিট $=1^\circ$ ডিগ্রী
90° ডিগ্রী $=1$ সমকোণ।

69. শতক পদ্ধতি—এই পদ্ধতিতেও সমকোণকে কোণের একক ধরা হয়। এক সমকোণকে 100 সমান ভাগ করিয়া এক অংশকে এক **গ্রেড** (grade) বলা হয়। এক গ্রেডকে 100 সমান ভাগ করিলে এক অংশকে এক **মিনিট** এবং এক মিনিটের 100 সমান ভাগের এক ভাগকে এক **সেকেণ্ড** বলে।

100\` সেকেণ্ডে 1\` মিনিট
100\` মিনিটে 1^g গ্রেড
100^g গ্রেডে 1 সমকোণ।

[**দ্রষ্টব্য**ঃ ষষ্টিক ও শতক এই উভয় পদ্ধতিতেই মিনিট ও সেকেণ্ড আছে ; সুতরাং উহাদের প্রতীক চিহ্নগুলি বিশেষভাবে লক্ষ্য করিতে হইবে।

1″ এইরূপ চিহ্নবিশিষ্ট কোণদ্বারা ষষ্টিক পদ্ধতির এক সেকেণ্ড এবং 1\`\` এই চিহ্নযুক্ত কোণদ্বারা শতক পদ্ধতির এক সেকেণ্ড বুঝায়। অনুরূপে 1′ এই চিহ্ন দ্বারা ষষ্টিক পদ্ধতির এক মিনিট এবং 1\` এই চিহ্ন দ্বারা শতক পদ্ধতির এক মিনিট বুঝায়।]

70. ষষ্টিক ও শতক মানের পরস্পর সম্বন্ধ—

$90^\circ = 1$ সমকোণ $= 100^g$, $\therefore\ 9^\circ = 10^g$, $\therefore\ 1^\circ = \frac{10^g}{9}$.

অনুরূপে $1^g = \frac{9^\circ}{10}$.

দ্রষ্টব্য নিয়ম: এক পদ্ধতির মানে প্রকাশিত কোণকে অন্য পদ্ধতির মানে প্রকাশ করিতে হইলে, প্রদত্ত কোণকে এক সমকোণের দশমিকে পরিণত করিয়া তৎপরে নূতন মানে পরিণত করিতে হয়। নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ।

উদা. 1. Express 51036″ in degrees, minutes and seconds.

```
60 )51036″( 850'        60 )850'( 14°
    480                     60
    ---                     ---
     303                     250
     300                     240
     ---                     ---
      36″                     10'
```

$\therefore\ 51036'' = 14^\circ 10' 36''$.

উদা. 2. Express 10°36′24″ in seconds.

```
 10°36'24"
 60
 ----
 600'
  36'
 ----
 636'
  60
 ----
38160"
   24"
 ------
38184"
```

$\therefore\ 10^\circ 36' 24'' = 38184''$.

উদা. 3. Express 24357`` in grades, minutes and seconds.

```
100 | 24357``
     ---------------
  100 | 243` ...... 57``
       -------------
         2g ...... 43
```

$\therefore\ 24357^{``} = 2^g 43^{`} 57^{``}$.

উদা. 4. Express $3^g\ 9'\ 74''$ in seconds.

$$\begin{array}{l} 3^g 9' 74'' \\ 100 \\ \hline 300' \\ \ \ 9' \\ \hline 309' \\ 100 \\ \hline 30900'' \\ \ \ 74'' \\ \hline 30974'' \end{array}$$

$\therefore\ 3^g 9' 74'' = 30974''$.

উদা. 5. Express 56°20′24″ in grades, minutes and seconds.

$$56°20'24'' = 56°20'\frac{24}{60} = 56°20{\cdot}4' = 56°\frac{20{\cdot}4}{60} = 56°\frac{2{\cdot}04}{6} = 56{\cdot}34°$$

$$= \frac{56{\cdot}34}{90} \text{ সমকোণ} = {\cdot}626 \text{ সমকোণ} = {\cdot}626 \times 100 \text{ গ্রেড}$$

$$= 62{\cdot}6^g = 62^g 60'.$$

উদা. 6. Express 30°45′30·6″ in centesimal system.

$$30°45'30{\cdot}6'' = 30 + \left(45 + \frac{30{\cdot}6}{60}\right)' = 30° + (45 + {\cdot}51)'$$

$$= 30 + 45{\cdot}51' = \left(30 + \frac{45{\cdot}51}{60}\right)° = (30{\cdot}7585)°$$

$$= \frac{30{\cdot}7585}{90} \text{ সমকোণ}$$

$$= {\cdot}34176\dot{1} \text{ সমকোণ}$$

$$\begin{array}{l} \times 100 \\ \hline 34{\cdot}176\dot{1}^g \\ \times 100 \\ \hline 17{\cdot}6\dot{1}' \qquad [\ {\cdot}176\dot{1} \times 100 \text{ করিয়া}\ ] \\ \times 100 \\ \hline 61{\cdot}\dot{1}'' \qquad [\ {\cdot}6\dot{1} \times 100 \text{ করিয়া}\ ] \end{array}$$

$30°45'30{\cdot}6'' = 34^g 17' 61{\cdot}\dot{1}''$.

উদা. 7. Express $14^g 17' 36''$ in right angles.

$14^g 17' 36'' = 14^g 17 \cdot 36' = 14 \cdot 1736^g = \cdot 141736$ সমকোণ।

[**দ্রষ্টব্য :** $36''$কে মিনিটে পরিণত করিবার জন্য 100 দিয়া ভাগ করিলে হয় ·36, সুতরাং 17·36 মিনিট হইল। উহাকে 100 ভাগ করিলে হয় ·1736 গ্রেড, সুতরাং 14·1736 গ্রেড হইল। উহাকে 100 ভাগ করিয়া হইল ·141736 সমকোণ। অতএব দেখা গেল যে, সেকেণ্ডের সংখ্যার ডানদিক হইতে দুই অঙ্ক বামে দশমিক বিন্দু বসাইলে উহা মিনিটে পরিণত হয় ; এইরূপে মিনিটের সংখ্যার দুই অঙ্ক বামে দশমিক বিন্দু বসাইলে গ্রেডে এবং গ্রেডের সংখ্যার দুই অঙ্ক বামে দশমিক বিন্দু বসাইলে সমকোণে পরিণত হয়। যদি দুই অঙ্ক না থাকিয়া এক অঙ্ক থাকে, তবে উহার বামে শূন্য বসাইয়া তাহার বামে দশমিক বিন্দু বসাইবে।]

উদা. 8. Express $40^g 8' 75''$ in sexagesimal system.

$40^g 8' 75'' = \cdot 400875$ সমকোণ

$\times 90$

$36^\circ \cdot 07875$

$\times 60$

$4 \cdot 725'$ [·07875 × 60 করিয়া]

$\times 60$

$\therefore\ 40^g 8' 75'' = 36^\circ 4' 43 \cdot 5''$. $\quad 43 \cdot 5''$ [·725 × 60 করিয়া]

71. কোণের বৃত্তীয় মান (circular measure)—বৃত্তীয় পদ্ধতিতে এক রেডিয়ানকে (Radian) কোণের একক ধরা হয়।

রেডিয়ান : যে কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ উহার কেন্দ্রে যে সম্মুখ-কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে এক রেডিয়ান (1^c) বলে। ইহা একটি ধ্রুবক (constant) কোণ এবং ইহার পরিমাণ প্রায় $57^\circ 17' 44 \cdot 8''$.

4^c বলিলে চার রেডিয়ান কোণ বুঝাইবে।

এই সম্বন্ধে আলোচনার পূর্বে নিম্নের প্রতিজ্ঞাটির জ্ঞান আবশ্যক।

72. প্রতিজ্ঞা : "বৃত্তসমূহের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত ধ্রুবক"।

["In all circles the ratio of the circumference to its diameter is always constant."] [C. U. '48]

Or, "The circumferences of circles are to one another as their radii."

Or, "The length of the circumference of a circle bears a constant ratio to its diameter"]

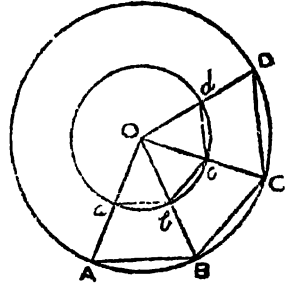
মনে কর, O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং যে কোন দুইটি ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল। R ও r যেন যথাক্রমে উহাদের ব্যাসার্ধ।

প্রথম বৃত্তে ABCD একটি সুষম বহুভুজ অন্তর্লিখিত হইল। মনে কর, ইহার বাহু-সংখ্যা n.

এখন, OA, OB, OC···প্রভৃতি যোগ করিলে উহারা দ্বিতীয় বৃত্তকে যথাক্রমে a, b, c, d···প্রভৃতি n-বিন্দুতে ছেদ করিল। ab, bc, cd···যোগ করিলে দ্বিতীয় বৃত্তে $abcd$···এই সুষম n-ভুজ অন্তর্লিখিত হইবে।

২নং চিত্র

এখন $\triangle OAB$ ও $\triangle Oab$র মধ্যে $\because$ OA = OB

এবং $Oa = Ob$, $\therefore$ $\frac{OA}{Oa} = \frac{OB}{Ob}$, আবার $\because$ $\angle AOB = \angle aOb$,

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ। $\therefore$ $\frac{AB}{ab} = \frac{OA}{Oa} = \frac{R}{r}$.

এইরূপে $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \quad = \frac{R}{r}$, $\therefore$ $\frac{AB+BC+CD+\cdots}{ab+bc+cd+\cdots} = \frac{R}{r}$,

অর্থাৎ $\frac{\text{ABCD···বহুভুজের পরিসীমা}}{abcd\text{···বহুভুজের পরিসীমা}} = \frac{R}{r} = \frac{\text{ABCD···বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}{abcd\text{···বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$.

এখন ABCD বহুভুজটির বাহুসংখ্যা n ক্রমশঃ যত বেশী হইবে AB, BC··· ক্রমশঃ তত ছোট হইবে। এইভাবে ক্রমশঃ চরম অবস্থায় (in the limit) বহুভুজেব পরিসীমা বৃত্তের পরিধির সহিত মিলিয়া যাইবে বা সমান হইবে।

অতএব, $\frac{\text{ABCD···বৃত্তের পরিধি}}{abcd\text{···বৃত্তের পরিধি}} = \frac{\text{ABCD···বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}{abcd\text{···বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$

$= \frac{R}{r} = \frac{2R}{2r} = \frac{\text{ABCD···বৃত্তের ব্যাস}}{abcd\text{···বৃত্তের ব্যাস}} =$ ধ্রুবক।

$\therefore$ $\frac{\text{ABCD···বৃত্তের পরিধি}}{\text{ABCD···বৃত্তের ব্যাস}} = \frac{abcd\text{···বৃত্তের পরিধি}}{abcd\text{···বৃত্তের ব্যাস}} =$ ধ্রুবক।

দ্রষ্টব্য ঃ ঐ ধ্রুবক সংখ্যাটি π (পাই) এই গ্রীসীয় অক্ষর দ্বারা সূচিত হয়। ইহা একটি অমেয় সংখ্যা। ইহার স্থূল মান $=\frac{22}{7}$ এবং অধিকতর আসন্ন মান $=\frac{355}{113}$ বা $3\cdot14159\cdots$।

বৃত্তের পরিধি $=2\pi r$ ($r=$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ), **বৃত্তের কালি** $=\pi r^2$.

73. **প্রতিজ্ঞা ঃ** "রেডিয়ান পরিমিত কোণ একটি ধ্রুবক কোণ।"

(A Radian is a constant angle.)

[Define a Radian. Show that the Radian is a constant angle. [C. U. '46 ; G. U '48]

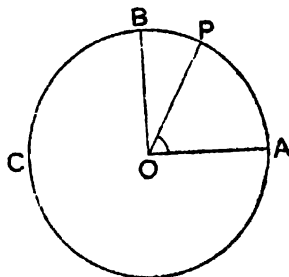
Or, The angle subtended at the centre of a circle by an arc which is equal in length to the radius is constant.]

মনে কর, APC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং চাপ AP $=$ ব্যাসার্ধ OA $=r$; সুতরাং $\angle$AOP এক রেডিয়ান (1^c).

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle$AOP ধ্রুবক। ব্যাসার্ধ OB$\perp$OA টান।

এক্ষণে চাপ AB $=\frac{1}{4}$ পরিধি।

৩নং চিত্র

প্রমাণ ঃ কোন বৃত্তের চাপগুলির সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণগুলির অনুপাত ঐ চাপগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান।

$$\therefore \frac{\angle AOP}{\angle AOB}=\frac{\text{চাপ } AP}{\text{চাপ } AB}=\frac{\text{ব্যাসার্ধ } OA}{\frac{1}{4}\text{ পরিধি}}=\frac{r}{\frac{2\pi r}{4}}=\frac{2}{\pi},$$

$$\therefore \frac{\angle AOP}{1 \text{ সমকোণ}}=\frac{2}{\pi}, \qquad \therefore \angle AOP=\frac{2}{\pi}\text{ সমকোণ},$$

অর্থাৎ এক রেডিয়ান $=\frac{2}{\pi}$ সমকোণ $=$ ধ্রুবক।

[**দ্রষ্টব্য ঃ** $1^c=\frac{2}{\pi}$ সমকোণ $=\frac{180^\circ}{\pi}$, $\pi^c=2$ সমকোণ $=180^\circ$,

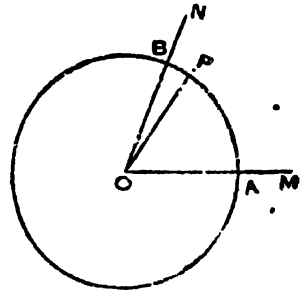
$\frac{\pi^c}{2}=1$ সমকোণ।]

74. প্রতিজ্ঞা : "কোন বৃত্তের কোন চাপ ও ব্যাসার্ধের অনুপাত ঐ চাপ-সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণের বৃত্তীয় মান হইবে।"

The circular measure of an angle is equal to the ratio of the arc of any circle subtending that angle at its centre to the radius of the circle.

Or, Prove that the radian measure of any angle at the centre of a circle is expressed by the fraction $\frac{\text{subtending arc}}{\text{radius}}$.

[C. U. '40, '47]

মনে কর, MON একটি কোণ ; ইহার বৃত্তীয় মান নির্ণয় করিতে হইবে। O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ (r) লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহা যেন OM ও ONকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন ∠AOB, AB চাপের সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণ হইল। বৃত্তের ব্যাসার্ধের (r) সমান করিয়া AP চাপ কাটিয়া লও এবং OP যোগ কর। ইহাতে ∠AOP = 1 রেডিয়ান হইল।

৪নং চিত্র

∵ কোন বৃত্তে চাপগুলির সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণগুলির অনুপাত ঐ চাপগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান, ∴ $\frac{\angle AOB}{\angle AOP} = \frac{\text{চাপ AB}}{\text{চাপ AP}} = \frac{\text{চাপ AB}}{r}$

$$\therefore \quad \angle AOB = \frac{\text{চাপ AB}}{r} \times \angle AOP = \frac{\text{চাপ AB}}{r} \times 1 \text{ রেডিয়ান}$$

$$= \frac{\text{চাপ AB}}{r} \text{ রেডিয়ান।}$$

[**দ্রষ্টব্য :** যদি চাপ AB $= s$, এবং ∠AOB $= \theta$ রেডিয়ান অর্থাৎ θ^c হয়, তবে $\theta = \frac{s}{r}$ হইবে। অর্থাৎ **কোণের বৃত্তীয় মান = চাপ ÷ ব্যাসার্ধ।** বৃত্তের চাপ $= \theta r$; বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$; বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\theta r^2$.]

75. তিনটি পদ্ধতির পরস্পর সম্বন্ধ :

$90° = 1$ সমকোণ। $100^g = 1$ সমকোণ ; $\frac{\pi^c}{2} = 1$ সমকোণ।

$\therefore \quad 90° = 100^g = \frac{\pi^c}{2}$, বা $180° = 200^g = \pi^c$.

মনে কর, কোন একটি কোণের পরিমাণ ষষ্টিক পদ্ধতিতে $D°$, শতক পদ্ধতিতে G^g এবং উহার বৃত্তীয় মান R^c.

এক্ষণে, $\because \; 90° = 1$ সমকোণ, $\therefore \; 1° = \frac{1}{90}$ সমকোণ,

$\therefore \quad D° = \frac{D}{90}$ সমকোণ। আবার $\because \; 100^g = 1$ সমকোণ,

$\therefore \quad 1^g = \frac{1}{100}$ সমকোণ, $\because \; G^g = \frac{G}{100}$ সমকোণ।

আবার, $\because \; \frac{\pi^c}{2} = 1$ সমকোণ, $\therefore \; 1^c = \frac{2}{\pi}$ সমকোণ,

$\therefore \quad R^c = \frac{2R}{\pi}$ সমকোণ।

$\therefore \quad \frac{D}{90} = \frac{G}{100} = \frac{2R}{\pi}$, $\qquad \therefore \quad \frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$.

76. এক পদ্ধতি হইতে অন্য পদ্ধতিতে পরিবর্তন :

(1) $\because \; 90° = 1$ সমকোণ, $\therefore \; 1° = \frac{1}{90}$ সমকোণ $= \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \frac{\pi^c}{180}$.

$\because \quad 90° = 100^g$, $\therefore \; 1° = \frac{10}{9}$ গ্রেড।

(2) $\because \; 100^g = 1$ সমকোণ, $\therefore \; 1^g = \frac{1}{100}$ সমকোণ $= \frac{\pi}{200}$ রেডিয়ান $= \frac{\pi^c}{200}$.

$\because \quad 100^g = 90°$, $\qquad \therefore \quad 1^g = \frac{9}{10}$ ডিগ্রী।

(3) $\because \; \pi^c = 2$ সমকোণ $= 180°$, $\therefore \; 1^c = \frac{180}{\pi}$ ডিগ্রী $= \frac{180°}{\pi}$.

$\because \; \pi^c = 2$ সমকোণ $= 200^g$, $\therefore \; 1^c = \frac{200}{\pi}$ গ্রেড $= \frac{200^g}{\pi}$

এই প্রসঙ্গে 70 নং অনুচ্ছেদের উদাহরণগুলি দেখ।

উদা. 1. Express 20°, 36°, 40^g and $6^g\ 25'$ in radians.

(ii) $\because\ 180° = \pi^c.\ \therefore\ 1° = \frac{\pi^c}{180},\ \therefore\ 20° = \frac{\pi^c \times 20}{180} = \frac{\pi^c}{9}.$

(ii) $\because\ 1° = \frac{\pi^c}{180},\ \therefore\ 36° = \frac{\pi^c \times 36}{180} = \frac{\pi^c}{5}.$

(iii) $\because\ 200^g = \pi^c,\ \therefore\ 1^g = \frac{\pi^c}{200},\ \therefore\ 40^g = \frac{\pi^c \times 40}{200} = \frac{\pi^c}{5}.$

(iv) $6^g 25' = 6 \cdot 25^g = \frac{25^g}{4}.$

$\because\ 1^g = \frac{\pi}{200}$ রেডিয়ান, $\therefore\ 6^g 25' = \frac{25^g}{4} = \frac{\pi^c}{200} \times \frac{25}{4} = \frac{\pi^c}{32}.$

উদা. 2. Express (a) $\frac{5}{12}\pi^c$ and (b) $\frac{9}{8}\pi^c$ in sexagesimal system.

(a) $\because\ 1^c = \frac{180}{\pi}$ ডিগ্রী, $\therefore\ \frac{5}{12}\pi^c = \frac{180°}{\pi} \times \frac{5\pi}{12} = 75°.$

(b) $\because\ 1^c = \frac{180°}{\pi},\ \therefore\ \frac{9\pi^c}{8} = \frac{180°}{\pi} \times \frac{9\pi}{8} = \frac{45 \times 9}{2}$ ডিগ্রী $= \frac{405°}{2}$

$= 2$ সমকোণ $22°30'.$

উদা. 3. Express $\frac{\pi^c}{12}$ in centesimal system.

$\because\ 1^c = \frac{200^g}{\pi},\ \therefore\ \frac{\pi^c}{12} = \frac{200^g}{\pi} \times \frac{\pi}{12} = \frac{50^g}{3} = 16 \cdot \dot{6}^g = 16^g 66' 66 \cdot \dot{6}''.$

উদা. 4. Express in the three systems of angular measurement the magnitude of the interior angle of a regular pentagon.

যে কোন বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $+ 4$ সমকোণ $=$ বাহু-সংখ্যার দ্বিগুণ সমকোণ।

$\therefore$ সুষম পঞ্চভুজের 5টি সমান অন্তঃকোণের সমষ্টি $+ 4$ সমকোণ $= 10$ সমকোণ।

$\therefore$ উহার 5টি সমান অন্তঃকোণের সমষ্টি $= 6$ সমকোণ,

$\therefore$ প্রত্যেক অন্তঃকোণের পরিমাণ $= \frac{6}{5}$ সমকোণ।

কিন্তু 1 সমকোণ $=90^\circ=100^g$: π^c

প্রত্যেক অন্তঃকোণ $=\frac{6}{5}\times 90^\circ=108^\circ$

অথবা $=\frac{6}{5}\times 100^g=120^g$

অথবা $=\frac{6}{5}\times\frac{\pi^c}{2}=\frac{3\pi}{5}$ রেডিয়ান

উদা. 5. The difference between the two acute angles of a right-angled triangle is $\frac{\pi}{6}$ radians ; express the angles in degrees.

মনে কর, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A$ ও $\angle B$ সূক্ষ্মকোণ, সুতরাং $\angle A+\angle B=90^\circ\cdots(1)$,

এবং $\angle A-\angle B=\frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান (স্বীকার) $=\frac{\pi}{6}\times\frac{180^\circ}{\pi}=30^\circ\cdots(2)$

এক্ষণে (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই $2\angle A=120^\circ$, $\therefore\ \angle A=60^\circ$,
সুতরাং $\angle B=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.

উদা. 6. The angles of a triangle are in A. P., and the greatest is double the least ; express the angles in radians. [C. U. '51]

মনে কর, ক্ষুদ্রতম কোণটি x ডিগ্রী, সুতরাং বৃহত্তম কোণটি $2x$ ডিগ্রী।

$\because$ কোণ তিনটি একটি সমান্তর শ্রেণী,

$\therefore$ তৃতীয় কোণটি $=\frac{1}{2}(x+2x)$ বা $\frac{3x}{2}$ ডিগ্রী।

অতএব, $x+\frac{3x}{2}+2x=180^\circ$, বা, $\frac{9x}{2}=180^\circ=\pi$ রেডিয়ান

$\therefore\ x=\frac{2\pi^c}{9}$. $\therefore$ কোণগুলি যথাক্রমে $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{3}$ ও $\frac{4\pi}{9}$ রেডিয়ান।

77. কোণ পরিমাণ সম্বন্ধে বিবিধ সমাধান।

উদা. 1. Two angles are in the ratio of 7 : 4 and their difference is 30°. Find the angles.

মনে কর, কোণ দুইটি যথাক্রমে $7x^\circ$ ও $4x^\circ$.

অতএব, $7x^\circ-4x^\circ=30^\circ$. $\therefore\ 3x^\circ=30^\circ$, $\therefore\ x=10^\circ$.

$\therefore$ একটি কোণ $=7x^\circ=70^\circ$ এবং অন্য কোণটি $=4x^\circ=40^\circ$.

উদা. 2. The sum of two angles is 80 grades and their difference is 18°. Find the angles in degrees as well as in grades.

80 গ্রেড $= 80 \times \frac{9}{10}$ ডিগ্রী $= 72°$. মনে কর, A ও B দুইটি কোণ।

অতএব, $A + B = 72°$

এবং $A - B = 18°$

$\therefore \quad 2A = 90°$; $\therefore \quad A = 45°$, অতএব $B = 72° - 45° = 27°$.

আবার, $45° = 45 \times \frac{10}{9}$ গ্রেড $= 50^g$, এবং $27° = 27 \times \frac{10}{9}$ গ্রেড $= 30^g$.

অতএব, কোণ দুইটি 45° ও 27°, অথবা 50^g ও 30^g.

উদা. 3. The sum of two angles is 135° and their difference is 100^g. Find the angles in radians. [G. U. '50]

মনে কর, কোণ দুইটি যথাক্রমে x ও y ডিগ্রী।

$100^g = 90°$, সুতরাং $x + y = 135°$

এবং $x - y = 90°$

$\therefore \quad 2x = 225°$

$$\therefore \quad x = \frac{225°}{2} = 112\tfrac{1}{2}°$$

$$\text{এবং } y = 135° - \frac{225°}{2} = 22\tfrac{1}{2}°.$$

$$\text{একটি কোণ} = \frac{225°}{2} = \frac{225}{2} \times \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান} = \frac{5\pi}{8} \text{ রেডিয়ান}$$

$$\text{এবং অন্য কোণটি} = \frac{45°}{2} = \frac{45}{2} \times \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান} = \frac{\pi}{8} \text{ রেডিয়ান।}$$

উদা. 4. Express in degrees the angle whose circular measure is 1·309. Assume $\pi = 3{\cdot}1416$. [C. U. '48]

$$\because \quad \pi^c = 180°, \quad \therefore \quad 1^c = \frac{180°}{\pi},$$

$$\therefore \quad 1{\cdot}309 \text{ রেডিয়ান} = \frac{180 \times 1{\cdot}309}{3{\cdot}1416} \text{ ডিগ্রী} = 75°.$$

উদা. 5. Two angles of a triangle are 55°12′36″ and 64°47′24″. Find the third angle in centesimal measure. [C. U. '50]

প্রদত্ত কোণদ্বয়ের সমষ্টি $= 50°12'36'' + 64°47'24'' = 120°$,
কিন্তু ত্রিভুজের কোণ তিনটির সমষ্টি $= 180°$,
$\therefore$ নির্ণেয় তৃতীয় কোণটি $= 180° - 120° = 60° = 60 \times \frac{10}{9}$ গ্রেড
$= \frac{200}{3}$ গ্রেড $= 66\dot{6}$ গ্রেড $= 66^g 66' 66\dot{6}''$.

উদা. 6. Express in degrees and minutes and also in grades all the angles of an isosceles triangle in which each of the angles at the base is twelve times the vertical angle. [C. U. '46]

মনে কর, শীর্ষকোণটি $x°$, সুতরাং প্রত্যেক ভূমিসংলগ্ন কোণ $= 12x°$,
$\therefore$ $x° + 12x° + 12x° = 180°$, বা $25x° = 180°$,
$\therefore$ $x = 7\frac{1}{5}$ ডিগ্রী $= 7°12'$. $\therefore$ শীর্ষকোণটি $= 7°12'$
এবং প্রত্যেক ভূমিসংলগ্ন কোণ $= 7°12' \times 12 = 86°24'$.
আবার, শীর্ষকোণটি $= \frac{36}{5}$ ডিগ্রী $= \frac{36}{5} \times \frac{10}{9}$ গ্রেড $= 8^g$
এবং প্রত্যেক ভূমিসংলগ্ন কোণ $= 8^g \times 12 = 96^g$.

উদা. 7. Taking $\frac{1}{\pi} = \cdot 31831$, show that a radian contains 206265 seconds approximately. [G. U. '48]

$\because$ $\pi^c = 180°$, $\therefore$ $1^c = 180° \times \frac{1}{\pi} = 180° \times \cdot 31831$
$= 180 \times \cdot 31831 \times 60 \times 60$ সেকেণ্ড
$= 206264 \cdot 88$ সেকেণ্ড $= 206265$ সেকেণ্ড (আসন্ন)।

উদা. 8. The sum of two angles is 114°. If the number of grades in one is equal to the number of degrees in the other, find the circular measure of the angles. [C. U. '43]

মনে কর, একটি কোণ $x°$, সুতরাং অন্য কোণটি $= x^g = \frac{9x°}{10}$

এক্ষণে, $x° + \frac{9x°}{10} = 114°$, বা $\frac{19x}{10} = 114$, $\therefore$ $x = \frac{114 \times 10}{19} = 60$.

$\therefore$ একটি কোণ $= 60° = 60 \times \frac{\pi^c}{180} = \frac{\pi^c}{3}$,

এবং অপর কোণটি $= 60^g = 60 \times \frac{\pi^c}{200} = \frac{3\pi^c}{10}$.

উদা. 9. The angles of a triangle are in the ratio of 2 : 5 : 3. Find the circular measure of the greatest angle. [C. U. '42]

$\triangle ABC$র কোণগুলির সমষ্টি অর্থাৎ $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

এবং $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 5 : 3$.

$\therefore$ বৃহত্তর $\angle B = \frac{5}{2+5+3} \times$ কোণসমষ্টি $= \frac{5}{10} \times 180^\circ = 90^\circ = \frac{\pi^c}{2}$.

উদা. 10. One angle of a triangle is 60° and the second is $\frac{\pi}{4}$ radian. Express the third angle in centesimal measure.

[C. U. '47]

প্রথম কোণ $= 60^\circ$, দ্বিতীয় কোণ $= \frac{\pi^c}{4} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$

কিন্তু তিনটি কোণের সমষ্টি $= 180^\circ$

$\therefore$ তৃতীয় কোণটি $= 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ = 75 \times \frac{10}{9}$ গ্রেড

$= 83\frac{1}{3}$ গ্রেড $= 83^g 33' 33{\cdot}3''$.

উদা. 11. The angles of a triangle are in arithmetical progression. If the number of degrees in the greatest angle be same as the number of grades in the least one, find the angles in degrees. [C. U. '44]

$\because$ কোণ তিনটি একটি সমান্তর শ্রেণী,

$\therefore$ মনে কর, উহারা যথাক্রমে $(a-d)$, a, $(a+d)$ ডিগ্রী।

ত্রিভুজের কোণ তিনটির সমষ্টি 2 সমকোণ বা 180°,

$\therefore$ $(a-d) + a + (a+d) = 180^\circ$ ......(1)

আবার, এখানে ক্ষুদ্রতম কোণ $(a-d)$ ডিগ্রী এবং বৃহত্তম কোণ $(a+d)$ ডিগ্রী। $a-d$ ডিগ্রী $= \frac{10}{9}(a-d)$ গ্রেড।

$\therefore$ প্রদত্ত সর্ত হইতে $a + d = \frac{10}{9}(a-d)$......(2) [$\because$ বলা আছে যে বৃহত্তম কোণের ডিগ্রীর সংখ্যা = ক্ষুদ্রতম কোণের গ্রেডের সংখ্যা।]

এক্ষণে (1) হইতে পাই $3a = 180^\circ$, $\therefore$ $a = 60^\circ$.

(2) হইতে পাই $60 + d = \frac{10}{9}(60 - d)$

বা, $540 + 9d = 600 - 10d$, বা, $19d = 60$, $\therefore$ $d = \frac{60}{19}$.

অতএব, কোণ তিনটি যথাক্রমে

$(60-\frac{60}{19})$ ডিগ্রী, 60 ডিগ্রী এবং $(60+\frac{60}{19})$ ডিগ্রী

অর্থাৎ $56\frac{16}{19}$ ডিগ্রী, 60 ডিগ্রী এবং $63\frac{3}{19}$ ডিগ্রী হইল।

উদা. 12. The radius of a circle is 6″, find the angle subtended at the centre by an arc 9″ in length.

আমরা জানি চাপ $= r\theta$*, এখানে চাপ $= 9''$, $r = 6''$ এবং θ কেন্দ্রস্থ কোণের বৃত্তীয় মান। $\therefore\ 9 = 6\theta$,

$$\therefore\ \theta = \frac{9}{6} \text{ বা } \frac{3}{2} \text{ রেডিয়ান} = \frac{3}{2} \times \frac{180}{\pi} \text{ ডিগ্রী} = \frac{3 \times 180 \times 7}{2 \times 22} \text{ ডিগ্রী}$$

$$= 85\frac{10}{11} \text{ ডিগ্রী।}$$

[**দ্রষ্টব্য :** *চাপ $= r\theta$, এই সূত্রে θ কোণটি সর্বত্র θ রেডিয়ান বুঝিবে।]

উদা. 13. Find the length of an arc which subtends one minute at the centre of the earth, supposed to be a sphere of diameter 7920 miles. $(\pi = \frac{22}{7})$. [C. U. '48]

চাপ $= r\theta$. এখানে $r =$ ব্যাসার্ধ $= \frac{7920}{2}$ মাইল।

$$\text{এবং } \theta = \text{কেন্দ্রস্থ কোণ} = 1' = \frac{1}{60} \text{ ডিগ্রী} = \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান}$$

$$\text{চাপের দৈর্ঘ্য} = r\theta = \frac{7920}{2} \times \frac{1}{60} \times \frac{22}{7 \times 180} \text{ মাইল}$$

$$= \frac{121}{105} \text{ মাইল} = 1\frac{16}{105} \text{ মাইল।}$$

উদা. 14. An arc of 17 yds. 1 ft. 3 in. subtends at the centre of a circle an angle of 1·9 radians. Find the radius of the circle in inches. [C. U. '49]

চাপ $= r\theta$; এখানে চাপ = 17 গ. 1 ফু. 3 ই. = 627 ই.

এবং $\theta =$ কেন্দ্রস্থ কোণ = 1·9 রেডিয়ান। অতএব, 627 ই. $= r \times 1{\cdot}9$,

$$\therefore\ r = \frac{627}{1{\cdot}9} \text{ ই.} = \frac{6270}{19} \text{ ই.} = 330 \text{ ই.},\quad \therefore \text{ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ} = 330 \text{ ইঞ্চি।}$$

উদা. 15. If the diameter of the earth is 8000 miles, find the measure of a Nautical mile. $[\pi = 3{\cdot}1416]$

দ্রাঘিমার যে চাপ পৃথিবীর কেন্দ্রে 1 মিনিট সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে, তাহার দৈর্ঘ্যকে এক নৌ-মাইল (Nautical mile) বলে।

চাপ $= r\theta$; এখানে $r = \frac{8000}{2}$ মাইল $= 4000$ মাইল

এবং $\theta = 1' = \frac{1}{60}$ ডিগ্রী $= \frac{\pi}{60 \times 180}$ রেডিয়ান

$\therefore$ চাপ বা 1 নৌ-মাইল $= r\theta = 4000 \times \frac{\pi}{60 \times 180}$ মা. $= \frac{4000 \times 3{\cdot}1416}{60 \times 180}$ মা.

$= \frac{10{\cdot}472}{9}$ মা. $= 1{\cdot}16$ মাইল (আসন্ন)।

উদা. 16. A horse running along a circular track of radius 27 ft. passes over in 3 seconds an arc which subtends 79° at the centre. Find the distance the horse travels in half a minute. ($\pi = \frac{22}{7}$). [C. U. '51]

চাপ $= r\theta$; এখানে $r = 27$ ফুট, $\theta = 70^\circ = \frac{70 \times \pi}{180}$ রেডিয়ান

$= \frac{70}{180} \times \frac{22}{7}$ রেডি. $= \frac{11}{9}$ রেডিয়ান

$\therefore$ চাপ $= r\theta = 27 \times \frac{11}{9}$ ফুট $= 33$ ফুট।

অতএব, ঘোড়াটি 3 সেকেণ্ডে 33 ফুট যায়,

$\therefore$ ঘোড়াটি $\frac{1}{2}$ মি. বা 30 সেকেণ্ডে 330 ফুট যায়।

উদা. 17. A man running on a circular track at the rate of 10 miles an hour traverses an arc which subtends 56° at the centre in 36 seconds. Find the diameter of the circle. Given $\pi = \frac{22}{7}$. [C. U. '46]

1 ঘণ্টায় বা 3600 সেকেণ্ডে যায় 10 মা. বা 17600 গজ

$\therefore$ 36 „ „ 176 গজ

$\therefore$ চাপটির দৈর্ঘ্য $= 176$ গজ।

উহার সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণ $= 56^\circ = \frac{\pi^c}{180} \times 56 = \frac{22 \times 56}{7 \times 180}$ রেডিয়ান

$= \frac{44}{45}$ রেডিয়ান

এক্ষণে, $\because$ চাপ $= r\theta$, $\therefore 176 = r \times \frac{44}{45}$, $\therefore r = \frac{176 \times 45}{44} = 180$.

অতএব, নির্ণেয় ব্যাস $= 2r = 180$ গজ $\times 2 = 360$ গজ।

উদা. 18. If a_1, a_2, a_3 be the circular measures of the angles subtended by the arcs of lengths l_1, l_2, l_3 at the centres of circles whose radii are r_1, r_2, r_3 respectively, show that the angle subtended at the centre by the arc of length $l_1+l_2+l_3$ of a circle whose radius is $\frac{1}{n}(a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3)$ will be n radians [C. U. '40]

$\because$ চাপ $= r\theta$, $\therefore$ $l_1 = r_1a_1$, $l_2 = r_2a_2$, $l_3 = r_3a_3$.

$\therefore$ $l_1+l_2+l_3 = a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3$.

একণে $l_1+l_2+l_3$ যদি চাপের দৈর্ঘ্য হয় এবং $\frac{1}{n}(a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3)$ যদি ব্যাসার্ধ হয়, তবে ঐ চাপের সম্মুখস্থ কেন্দ্রস্থ কোণটির মান নির্ণয় করিতে হইবে।

$$\because \quad r\theta = \text{চাপ}, \qquad \therefore \quad \theta = \frac{\text{চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}$$

$$\therefore \quad \text{কোণটির নির্ণেয় মান} = \frac{l_1+l_2+l_3}{\frac{1}{n}(a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3)} \text{ রেডিয়ান}$$

$$= \frac{(a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3) \text{ রেডি.}}{\frac{1}{n}(a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3)} = \frac{1}{\frac{1}{n}} \text{ রেডি.} = n \text{ রেডিয়ান।}$$

উদা. 19. If D and C be respectively the number of degrees and the number of radians in an angle, show that $\frac{D}{180} = \frac{C}{\pi}$.

[C. U. '47, D. B. '50]

এখানে একই কোণের পরিমাণ D ডিগ্রী বা C রেডিয়ান বলা আছে।

$\therefore$ D ডিগ্রী = C রেডিয়ান। $\because$ D ডিগ্রী $= \frac{D}{90}$ সমকোণ এবং C রেডিয়ান $= \frac{2C}{\pi}$ সমকোণ, $\therefore \frac{D}{90} = \frac{2C}{\pi}$. $\therefore \frac{D}{180} = \frac{C}{\pi}$.

উদা. 20. The number of degrees, grades and radians in an angle are respectively x, y and z. Show that $\frac{x}{90} = \frac{y}{100} = \frac{2z}{\pi}$.

[C. U. '41, '45; G. U. '51]

$\because$ একই কোণের পরিমাণ x^o, y^g বা, z^c, $\therefore$ $x^o = y^g = z^c$.

একণে $x^\circ = \frac{x}{90}$ সমকোণ $y^g = \frac{y}{100}$ সমকোণ এবং $z^c = \frac{2z}{\pi}$ সমকোণ,

$$\therefore \frac{x}{90} = \frac{y}{100} = \frac{2z}{\pi}.$$

উদা. 21. Find the area of a circle whose radius is ·1 ft. ($\pi = 3·1416$).

বৃত্তের কালি $= \pi r^2 = 3·1416 \times (·1)^2$ বর্গফুট $= 3·1416 \times ·01$ বর্গফুট
$= ·031416$ বর্গফুট।

উদা. 22. A mill sail, 28 ft. long, makes 10 revolutions per minute. What distance does its end traverse in an hour ? ($\pi = \frac{22}{7}$).

এখানে ব্যাসার্ধ $r = 28$ ফুট। $\therefore$ পরিধি $= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 28$ ফুট
$= 176$ ফুট।

অতএব, পালটি একবার ঘুরিলে 1', ট গমন করে।

$\therefore$ এক মিনিটে উহা 176×10 বা 1760 ফুট ঘোরে,

$\therefore$ এক ঘণ্টায় উহা $\frac{1760 \times 60}{3 \times 1760}$ মাইল বা 20 মাইল ঘোরে।

উদা. 23. The large hand of a clock is 2 ft. 4 inches long ; how many inches does its extremity move in 20 minutes ? ($\pi = 3·1416$). [C. U. '48]

ঘড়িটির পরিধি $= 2\pi r = 2 \times 3·1416 \times 2$ফু. 4ই. $= 2 \times 3·1416 \times 28$ই.।

ঘড়ির মিনিটের কাঁটা 60 মিনিটে সমস্ত পরিধি একবার ঘোরে,

$\therefore$ 20 মিনিটে উহা পরিধির $\frac{1}{3}$ অংশ ঘুরিবে।

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= \frac{2 \times 3·1416 \times 28}{3}$ ইঞ্চি $= 58·6432$ ইঞ্চি।

উদা. 24. Find the times between 4 and 5 o'clock when the angle between the minute-hand and the hour-hand is (i) 72° and (ii) $\frac{8\pi}{15}$ radians.

ঘড়ির সমগ্র পরিধি কেন্দ্রে 360° কোণ উৎপন্ন করে। আবার, এই সমগ্র পরিধি 60 মিনিট ঘরের সমান।

(i) এক্ষণে, 360° = 60 মিনিট-ঘর পরিমাণ চাপের সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণ,

$\therefore$ 72° = 12 মিনিট-ঘর " " " " "

সুতরাং উভয় কাঁটার অন্তর 12 মিনিট-ঘর হইবে। 4টার সময় মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার 20 মিনিট-ঘর পিছনে ছিল। অতএব যদি মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা (20 − 12) বা 8 মিনিট-ঘর অথবা (20 + 12) বা 32 মিনিট-ঘর বেশী যায়, তবে উভয় কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ 72° হইবে।

মিনিটের কাঁটা 55 মিনিট-ঘর বেশী যায় 60 মিনিটে

$\therefore$ " " 8 " " " $\frac{60\times 8}{55}$ বা $\frac{96}{11}$ বা $8\frac{8}{11}$ মিনিটে।

আবার, " 32 " " " $\frac{60\times 32}{55}$ বা $34\frac{10}{11}$ মিনিটে

অতএব, 4টা $8\frac{8}{11}$ মিনিটে এবং 4টা $34\frac{10}{11}$ মিনিটে কাঁটা দুইটির মধ্যবর্তী কোণ 72° হইবে।

(ii) $\frac{8\pi}{15}$ রেডিয়ান $=\frac{8\pi}{15}\times\frac{180^\circ}{\pi}=96^\circ$.

360° কোণ হইলে চাপের পরিমাণ 60 মিনিট-ঘর হয়,

$\therefore$ 96° " " " " $\frac{60}{360}\times 96$ বা 16 মিনিট-ঘর হয়

[বাকী অংশ পূর্বের মত কর] উত্তর = 4টা $4\frac{4}{11}$ মিনিট বা 4টা $39\frac{3}{11}$ মিনিট।

উদা. 25. If the radius (4000 miles) of the earth subtends an angle of 8·6″ at any point in the surface of the sun, what is the distance of the earth from the sun ? [C. U.]

এখানে মনে কর, সূর্য-পৃষ্ঠের উপর S একটি বিন্দু, E বিন্দু পৃথিবীর কেন্দ্র। ES সূর্য হইতে পৃথিবীর দূরত্ব। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ EP ঐ S বিন্দুতে যে ESP কোণ উৎপন্ন করিয়াছে তাহা 8·6″.

এখন মনে কর, S-কে কেন্দ্র করিয়া SE ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁকা হইয়াছে। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ EP ঐ বৃত্তে যে চাপ ছেদ করিয়াছে তাহা স্থূলতঃ EP ব্যাসার্ধেরই সমান, কারণ এখানে ∠ESP অতিশয় ক্ষুদ্র এবং ES অতিশয় দীর্ঘ।

অতএব, $\because$ চাপ $= r\theta$, $\therefore \frac{\text{চাপ}}{r} = \theta$,

$\therefore \frac{EP}{ES} = \theta = 8{\cdot}6''$এর বৃত্তীয় মান $= \frac{8{\cdot}6 \times \pi}{60 \times 60 \times 180}$ রেডিয়ান

$\therefore \frac{4000}{ES} = \frac{8{\cdot}6 \times \pi}{60 \times 60 \times 180} = \frac{8{\cdot}6 \times 22}{60 \times 60 \times 180 \times 7}$

$\therefore$ ES অর্থাৎ নির্ণেয় দূরত্ব $= \frac{4000 \times 60 \times 60 \times 180 \times 7}{8{\cdot}6 \times 22}$ মা.

$= 95898521$ মাইল (প্রায়)।

উদা. **26.** Express the circular measure the angle between the two hands of a clock at 9-30 A. M. [U. U. '48]

9টার সময় মিনিটের কাঁটা 12টার দাগে এবং ঘণ্টার কাঁটা 9টার দাগে ছিল। 9-30 মিনিটের সময় মিনিটের কাঁটা 6টার দাগে আছে এবং এই 30 মিনিটে ঘণ্টার কাঁটা 9টার দাগ হইতে $\frac{30}{12}$ মিনিট-ঘর বা $2\frac{1}{2}$ মি.-ঘর আগে সরিয়া গিয়াছে। $\therefore$ 9-30 মিনিটে উভয় কাঁটার মধ্যে ব্যবধান $(15+2\frac{1}{2})$ বা $17\frac{1}{2}$ মিনিট-ঘর।

$\because$ উভয় কাঁটার ব্যবধান 15 মিনিট-ঘর হইলে মধ্যবর্তী কোণ হয় 90°,

$\therefore$ " " " $17\frac{1}{2}$ " " " " "

$\frac{90 \times 17\frac{1}{2}}{15}$ ডিগ্রী

$= 105° = \frac{105\pi^c}{180} = \frac{7}{12}\pi^c.$

Exercise 1

1. Express in degrees, minutes and seconds :—
   (i) 13214″ (ii) 507·5′ (iii) ·24rt. angle.
2. Exprees the following in grades, minutes and seconds :
   (i) 46235″ (ii) 703·3′ (iii) 10·7205ᵖ (iv) ·03246 rt. angle.
3. Express the following angles in terms of a right angle :—
   (i) 30° (ii) 60°45′ (iii) 135° (iv) 360°20′48″ (v) 50°35′24″ (vi) $\frac{\pi}{3}^c$ (vii) $10\pi^c$.

4. Express the following angles in centesimal system :—
(i) $30°12'36''$ (ii) $63°14'51''$ (iii) $60°6'45''$ (iv) $\frac{3\pi^c}{5}$, (v) $\frac{\pi^c}{12}$.

5. Reduce the following angles to sexagesimal measure :
(i) $40^g 35' 24''$ (ii) $60^g 25''$ (iii) $40^g 45' 36''$ (iv) 2^c (v) $\frac{5}{9}\pi^c$ (vi) $\frac{2\pi^c}{3}$.

6. Express the following angles in radians :—
(i) $30°$ (ii) $75°30'$ (iii) $45°25'36''$ (iv) 120^g (v) $70^g 40'$ (vi) $325^g 25' 72''$.

7. The sum of two angles is 60 grades and their difference is $16°$; find the angles in degrees and in grades.

8. The sum of two angles is $140°$ and their difference is 90^g, find the angles in degrees and radians.

9. Two angles are in the ratio of 5 : 3 and their difference is (i) $40°$, (ii) 100^g, (ii) $12\pi^c$, find the angles.

10. Two angles of a triangle are $48°47'28''$ and $71°12'32''$. Find the third angle in centesimal measure.

11. The sum of two angles is $152°$. If the number of degrees in one is equal to the number of grades in the other, find the circular measure of the angles.

12. Divide a right angle into two parts such that the number of degrees in the one and that of grades in the other may be in the ratio of 3 : 10.

13. The angles of a triangle are in the ratio of 4 : 3 : 5, find the circular measure of the least angle.

14. One angle of a triangle is $\frac{3\pi^c}{10}$ and another is 70^g Express the third angle in degrees. [C. U.]

15. Divide $88°16'$ into two parts such that the number of sexagesimal seconds in one part may be the same as the number of centesimal seconds in the other.

16. The four angles of a quadrilateral are in A. P.; the greatest angle is twice the least angle. Find the circular measure of the least angle. [B. U. 1897]

17. The angle of a quadrilateral are x°, 60°, 60° and $\frac{5}{6}\pi^c$; find x. [B. U.]

18. Find the circular measure of an interior angle of a regular n-gon. [C. U.]

19. The difference of two angles is 1° and the sum of their circular measure is 1. Find the angles in degrees. [M. U.]

20. Show that the number of degrees in an angle of a regular dudecagon is equal to the number of grades in an angle of a regular octagon. [M. U.]

21. The angles of a pentagon are in A. P. and its greatest angle is thrice the least. Find the angles in degrees and radians. [B. U.]

22. The circumference of a circle is 176 yds., find its radius. $(\pi = \frac{22}{7})$.

23. The radius of a circle is 7″, find the angle subtended at the centre by an arc 11″ in length.

24. Find the length of an arc which subtends $22\frac{1}{2}^\circ$ at the centre, the radius being 17·6″. $(\pi = \frac{22}{7})$.

25. Find the circumference of a coin whose diameter is one inch. $(\pi = \frac{22}{7})$.

26. An arc of a circle measuring 2618 ft., subtends an angle of 60° at the centre. Find the radius of the circle. $(\pi = 3.1416)$. [C. U.]

27. If an arc of 5 yds. 1 ft. 6 in. subtends an angle of 1.8^c at the centre, find the radius of the circle in inches.

28. Assuming the distance of the sun from the earth to be 92,000,000 miles and the angles subtended by the diameter of the sun at the earth to be 32′, find the diameter of the sun. $(\pi = \frac{22}{7})$.

29. An arc of a circle, whose radius is 48 ft., subtends an angle $66°15'$ at the centre. Find the length of the arc.

(Given circumference : diameter : : 333 : 106). [C. U.]

30. An arc of a circle, whose radius is 4000 miles, subtends at its centre an angle of $5''$. Find the length of the arc in miles. [C. U. 1877]

31. Assuming the radius of the earth to be 4000 miles, find the difference in latitude of two places, one of which is 100 miles north of the other. ($\pi = 3{\cdot}14159\cdots$).

32. Find, correct to a foot, the length of an arc of the Earth's equator, which subtends an angle of 1 minute at the centre of the Earth, supposing the radius of the Earth's equator to be 4000 miles and $\pi = 3{\cdot}14159$. [G. U. '50]

33. If the circumference of a circle be divided into five parts which are in A. P. and if the greatest part be six times the least, find in radians the angles subtended by the parts at the centre. [B. U.]

34. Calculate, correct to 3 places of decimals, the area of a circle of radius $6{\cdot}28$ ft. ($\pi = 3{\cdot}14159$). [E. B. S. B. '49]

35. A horse running along a circular path at the rate of 5 miles an hour traverses an arc which subtends $63°$ at the centre in 0 seconds. Find the diameter of the circle. ($\pi = \frac{22}{7}$).

36. The minute-hand of a clock is 2 ft. 6 in. long, how many inches does its extremity move in 30 minutes ?

($\pi = 3{\cdot}1416$).

37. Find the times between 5 and 6 o'clock when the angle between the two hands of a clock is $84°$.

38. A regular polygon has three times as many sides as another and the number of degrees in each interior angle of the first is the same as the number of grades in that of the second. Find the number of sides of each polygon.

39. The angles of a triangle are in A. P. and the greatest is double the least ; express the angles in radians. [C.U. '51]

40. Show that the number of degrees in an angle of a regular decagon is to the number of grades in an angle of a regular pentagon as 6 : 5. [C. U. '50]

41. Find the time between 1 P. M. and 2 P M. when the angle between the hands of a clock is $186\frac{2}{3}$ grades. [C.U. '51]

42. A man $5\frac{1}{2}$ ft. high is seen from the distance of half a mile ; what is the angle that he subtends ? [W.B.S.F. '52]

43. Find the ratio of the radii of two circles at the centres of which two arcs of the same length subtend angles of 60° and 75°. [W.B.S.F. '53]

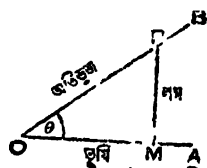
[Hints. $\because 180^\circ = \pi^c$ $\quad 60^\circ = \frac{\pi}{3}^c$ এবং $75^\circ = \frac{5\pi}{12}^c$. যদি বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r ও R হয়, তবে প্রথম বৃত্তের চাপ $= \frac{\pi}{3}.r$ এবং দ্বিতীয় বৃত্তের চাপ $= \frac{5\pi}{12}.R$. আবার, $\because$ চাপদ্বয় সমান (স্বীকার),

$$\therefore \frac{\pi}{3}.r = \frac{5\pi}{12}.R, \quad \therefore r : R = \frac{5\pi}{12} : \frac{\pi}{3} = 5 : 4.]$$

44. Express in circular measure an angle of a regular polygon of 10 sides. [U.U. '50]

কোণানুপাত (Trigonometrical Ratios)

78. **সংজ্ঞা :** মনে কর, AOB এই কোণটির পরিমাণ θ (থিটা)। OB বাহুর যে কোন বিন্দু P হইতে OAর উপর PM লম্ব টানা হইয়াছে। এখন POM সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ θ-র সম্পর্কে PMকে ইহার লম্ব, OMকে ভূমি এবং OPকে অতিভুজ বলে। আবার, P সূক্ষ্মকোণের সম্পর্কে OMকে ইহার লম্ব, PMকে ভূমি এবং OPকে অতিভুজ বলিতে হইবে। এখন $\angle POM$ বা θ কোণের কোণানুপাতগুলি পরপৃষ্ঠায় লিখিত রূপে হইবে :—

৫নং চিত্র

$\frac{PM}{OP}$ (অর্থাৎ $\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$) $= \theta$ কোণের **সাইন** (Sine)

$\frac{OM}{OP}$ (অর্থাৎ $\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$) = ,, ,, **কোসাইন** (Cosine)

$\frac{PM}{OM}$ (অর্থাৎ $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$) = ,, ,, ট্যান্জেণ্ট (Tangent)

$\frac{OM}{PM}$ (অর্থাৎ $\frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$) = ,, ,, কোট্যান্জেণ্ট (Cotangent)

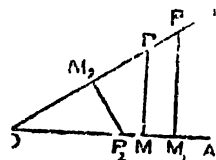
$\frac{OP}{PM}$ (অর্থাৎ $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$) = ,, ,, কোসেকাণ্ট (Cosecant)

$\frac{OP}{OM}$ (অর্থাৎ $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$) = ,, ,, সেকাণ্ট (Secant)

সংক্ষেপে এই অনুপাতগুলিকে **সাইন** θ ($\sin\theta$), **কস** θ ($\cos\theta$), **ট্যান** θ ($\tan\theta$), **কট** θ ($\cot\theta$), কোসেক θ ($\text{cosec}\,\theta$) এবং সেক θ ($\sec\theta$) লেখা হয়।

এইগুলি ব্যতীত $1-\cos\theta$কে **ভার্স** θ ($\text{vers}\,\theta$) এবং $1-\sin\theta$কে **কোভার্স** θ ($\text{co-vers}\,\theta$) বলে।

79. Prove that the trigonometrical ratios are always the same for the same angle.

O-কোণের OB বাহুর উপর অপর যে কোন বিন্দু P_1 হইতে OA বাহুর উপর P_1M_1 লম্ব টানা হইল। এখানে দেখান হইবে যে $\triangle POM$ হইতে O-কোণের যে কোণানুপাতগুলি পাওয়া গিয়াছিল $\triangle P_1OM_1$ হইতেও তাহাই পাওয়া যায়। POM ও P_1OM_1 এই ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle O$ সাধারণ কোণ, $\angle M = \angle M_1$ (সমকোণ বলিয়া), সুতরাং অবশিষ্ট $\angle P = \angle P_1$. অতএব ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

৬নং চিত্র

$$\frac{PM}{OP} = \frac{P_1M_1}{OP_1}, \quad \frac{OM}{OP} = \frac{OM_1}{OP_1}, \quad \frac{PM}{OM} = \frac{P_1M_1}{OM_1} \ldots\ldots \text{ইত্যাদি}$$

অতএব, প্রমাণিত হইল যে, OBর উপর P বিন্দুর যে কোণ অবস্থিতিতে O-কোণের কোণানুপাতগুলি সমান হইবে।

এইরূপে যদি OA রেখার উপরিস্থ কোন বিন্দু P_2 হইতে OBর উপর P_2M_2 লম্ব টানা হয়, তাহা হইলে $\triangle OP_2M_2$ হইতে O-কোণের যে কোণানুপাতগুলি পাওয়া যায় সেগুলিও পূর্ব কোণানুপাতগুলির সমান। কারণ, $\triangle POM$ এবং $\triangle P_2OM_2$ সদৃশকোণী বলিয়া উহাদের অনুরূপ বাহুগুলিও সমানুপাতী।

80. কোণানুপাতগুলির পরস্পর সম্বন্ধ

লক্ষ্য কর যে, সাইনের $\left(\frac{PM}{OP}\right)$ বিপরীত কোসেক $\left(\frac{OP}{PM}\right)$, কসের $\left(\frac{OM}{OP}\right)$ বিপরীত সেক $\left(\frac{OP}{OM}\right)$ এবং ট্যানের $\left(\frac{PM}{OM}\right)$ বিপরীত কট $\left(\frac{OM}{PM}\right)$।

অতএব, এইগুলি ভালরূপে মনে রাখিবে :—

(i) $\sin\theta=\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ এবং $\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$, $\therefore\ \sin\theta\times\operatorname{cosec}\theta=1$

(ii) $\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}$ এবং $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$, $\therefore\ \cos\theta\times\sec\theta=1$

(iii) $\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$ এবং $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$, $\therefore\ \tan\theta\times\cot\theta=1$

(iv) $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ এবং $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

[দ্রষ্টব্য : (i) $\sin\theta$, $\cos\theta$ প্রভৃতি দ্বারা অনুপাত বুঝায় বলিয়া ইহারা এক একটি সংখ্যা। অতএব, যোগ বিয়োগ গুণ ভাগের নিয়ম ইহাদের প্রতি প্রযুক্ত হইবে। (ii) $\sin\theta$র দ্বারা একটি সংখ্যা বুঝায়, ইহার অর্থ $\sin\times\theta$ হইবে না। (iii) a ও b এই সংখ্যাদ্বয়ের যোগ বিয়োগ প্রভৃতি যেরূপ হয়, সেইরূপে $\sin\theta$ ও $\cos\theta$-এর যোগফল $\sin\theta+\cos\theta$, উহাদের অন্তর $\sin\theta-\cos\theta$ উহার গুণফল $\sin\theta\cos\theta$ এবং ভাগফল $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ হয়।

অতএব, $\sin\theta\times\sin\theta=(\sin\theta)^2=\sin^2\theta$ এবং $\sin\theta\times 2=2\sin\theta$.

(iv) আরও দেখ $(\sin\theta)^2$এর পরিবর্তে $\sin^2\theta$ এইভাবে লিখিতে হয়; কিন্তু $\sin\theta^2$ লিখিলে অন্য অর্থ বুঝাইবে। আবার, $2\sin\theta$ এবং $\sin 2\theta$ এক নহে। প্রথমটির অর্থ $\sin\theta$-র দ্বিগুণ এবং দ্বিতীয়টির অর্থ θর দ্বিগুণ কোণের sine].

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্বন্ধীয় অভেদাবলী

81. নিম্নের প্রয়োজনীয় সূত্রগুলি (বা অভেদগুলি) বিশেষভাবে স্মরণ রাখিতে হইবে। যথা—(i) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (ii) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (iii) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ (iv) $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$. ইহাদের প্রমাণ নিম্নে দেখ—

(i) **প্রমাণ :** [৫নং চিত্রটি এখানে আঁক]

$\because$ PM$\perp$OM, $\therefore \sin\theta = \frac{PM}{OP}$, $\cos\theta = \frac{OM}{OP}$ এবং $\tan\theta = \frac{PM}{OM}$.

এক্ষণে, $\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{\frac{PM}{OP}}{\frac{OM}{OP}}$ (লব ও হরকে OP দ্বারা ভাগ করিয়া)

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

(ii) Prove that $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. [E.B.S.B. '30]

[৫নং চিত্র আঁক] চিত্রে $\angle M$ সমকোণ বলিয়া $PM^2 + OM^2 = OP^2$,

$\therefore \frac{PM^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2}$ (উভয় পক্ষকে OP^2 দ্বারা ভাগ করিয়া)

বা, $\left(\frac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2 = 1$; কিন্তু $\sin\theta = \frac{PM}{OP}$ এবং $\cos\theta = \frac{OM}{OP}$,

$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

(iii) Prove that $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$. [C.U. '49 ; E.B.S.B.]

৫নং চিত্রে $\angle M$ সমকোণ বলিয়া $\sec\theta = \frac{OP}{OM}$, $\tan\theta = \frac{PM}{OM}$,

এবং $OP^2 = PM^2 + OM^2$.

$\therefore \quad \frac{OP^2}{OM^2} = \frac{PM^2}{OM^2} + \frac{OM^2}{OM^2}$, বা $\left(\frac{OP}{OM}\right)^2 = \left(\frac{PM}{OM}\right)^2 + 1$

$\therefore \quad \sec^2\theta = \tan^2\theta + 1.$

(vi) ৫নং চিত্রে $OP^2 = PM^2 + OM^2$,

এবং $\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM}$, $\cot\theta = \frac{OM}{PM}$.

এক্ষণে, $\because OP^2 = PM^2 + OM^2$, $\therefore \frac{OP^2}{PM^2} = \frac{PM^2}{PM^2} + \frac{OM^2}{PM^2}$,

বা, $\left(\frac{OP}{PM}\right)^2 = 1 + \left(\frac{OM}{PM}\right)^2$, $\therefore \operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$.

82. বিবিধ অভেদের সমাধান

উদা. 1. Prove that $\sin^4\theta - \cos^4\theta + 1 = 2\sin^2\theta$.

$\sin^4\theta - \cos^4\theta + 1 = (\sin^2\theta)^2 - (\cos^2\theta)^2 + 1$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + 1$

$= 1 \times (\sin^2\theta - \cos^2\theta) + \sin^2\theta + \cos^2\theta \; [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= \sin^2\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta = 2\sin^2\theta.$

উদা. 2. Prove that $\cos A + \tan A \sin A = \sec A$. [C U. '50]

বামপক্ষ $= \cos A + \frac{\sin A}{\cos A} \times \sin A = \cos A + \frac{\sin^2 A}{\cos A} = \frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos A}$

$= \frac{1}{\cos A} = \sec A.$

উদা. 3. Prove that $\frac{1}{\cot A + \tan A} = \sin A \cos A$. [C. U. '46]

বামপক্ষ $= \frac{1}{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\sin A}{\cos A}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\sin A \cos A}} = \frac{1}{\frac{1}{\sin A \cos A}} = \sin A \cos A.$

উদা. 4. Prove that $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sec\theta-\tan\theta.$

$$\text{বামপক্ষ}=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\sec\theta-\tan\theta.$$

উদা. 5. Show that $\sec^2 A\ \text{cosec}^2 A=\tan^2 A+\cot^2 A+2.$ [C. U. '40]

$$\text{বামপক্ষ}=(1+\tan^2 A)(1+\cot^2 A)$$

$$=1+\tan^2 A+\cot^2 A+\tan^2 A\cot^2 A$$

$$=1+\tan^2 A+\cot^2 A+\tan^2 A\times\frac{1}{\tan^2 A}$$

$$=1+\tan^2 A+\cot^2 A+1=\tan^2 A+\cot^2 A+2.$$

উদা. 6. Show that $1+\dfrac{\cot^2 A}{1+\text{cosec}\ A}=\text{cosec}\ A.$ [C. U. '47]

$$\text{বামপক্ষ}=1+\frac{\text{cosec}^2 A-1}{1+\text{cosec}\ A}=1+\frac{(\text{cosec}\ A+1)(\text{cosec}\ A-1)}{\text{cosec}\ A+1}$$

$$=1+\text{cosec}\ A-1=\text{cosec}\ A.$$

উদা. 7. Show that $(\sec\theta-\cos\theta)(\text{cosec}\theta-\sin\theta)(\tan\theta+\cot\theta)=1.$ [C. U. '51]

$$\text{বামপক্ষ}=\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\times\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\times\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\times\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\times\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=1.$$

উদা. 8. Prove that $\dfrac{1}{\sec\theta+\tan\theta}-\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}.$ [C. U. '44 ; G. U. '51]

$$\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}+\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}=\frac{\sec\theta-\tan\theta+\sec\theta+\tan\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$$

$$=\frac{2\sec\theta}{1}=2\sec\theta=\frac{2}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}.$$

এক্ষণে, পক্ষান্তর করিয়া পাই

$$\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}-\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}.$$

উদা. 9. Prove that $\cos^2 A-\sin^2 A=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$. [G.U. '50]

বামপক্ষ $=\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A+\sin^2 A}$ ($\because \cos^2 A+\sin^2 A=1$)

$$=\frac{\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$ [লব ও হরকে $\cos^2 A$ দ্বারা ভাগ করা হইল, ইহাতে মানের কোন পরিবর্তন হইবে না।]

$$=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$$

উদা 10 Show that $\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}$.

বামপক্ষ $=\frac{(\tan\theta+\sec\theta)+(\tan^2\theta-\sec^2\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}$

[$\because \sec^2\theta=1+\tan^2\theta$, $\therefore -1=\tan^2\theta-\sec^2\theta$]

$$=\frac{(\tan\theta+\sec\theta)(1+\tan\theta-\sec\theta)}{(\tan\theta-\sec\theta+1)}=\tan\theta+\sec\theta$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}.$$

উদা. 11. If $\sin A+\sin^2 A=1$, prove that $\cos^2 A+\cos^4 A=1$. [E. B. S. B. '51]

$\because$ এখানে $\sin A+\sin^2 A=1$, $\therefore \sin A=1-\sin^2 A=\cos^2 A$,

$\therefore \sin^2 A=\cos^4 A$. এক্ষণে, $\cos^2 A+\cos^4 A=\cos^2 A+\sin^2 A=1$.

উদা. 12. If $\cos A+\sin A=\sqrt{2}\cos A$, prove that

$$\cos A-\sin A=\sqrt{2}\sin A.$$

$\because\ \cos A+\sin A=\sqrt{2}\cos A\ldots$(i),

$\therefore\ \cos^2 A+\sin^2 A+2\cos A\times\sin A=2\cos^2 A$ (বর্গ করিয়া)

বা, $\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos A\sin A\cdots(2)$ [পক্ষান্তর করিয়া]

এখন (2) ÷ (1) করিয়া $\cos A-\sin A=\dfrac{2\cos A\sin A}{\sqrt{2}\cos A}=\sqrt{2}\sin A.$

উদা. 13. Simplify $\cos^2 A\cos^2 B+\sin^2 A\sin^2 B$
$+\cos^2 A\sin^2 B+\cos^2 B\sin^2 A.$ [C. U. '43]

প্রদত্ত রাশি $=(\cos^2 A\cos^2 B+\cos^2 A\sin^2 B)+$
$(\sin^2 A\sin^2 B+\cos^2 B\sin^2 A)$
$=\cos^2 A(\cos^2 B+\sin^2 B)+\sin^2 A(\sin^2 B+\cos^2 B)$
$=(\cos^2 B+\sin^2 B)(\cos^2 A+\sin^2 A)=1\times 1=1.$

উদা. 14. Simplify $\dfrac{(\sin A+\cos A)(1-\sin A\cos A)}{\sin^3 A+\cos^3 A}.$

প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=\dfrac{(\sin A+\cos A)(\sin^2 A+\cos^2 A-\sin A\cos A)}{\sin^3 A+\cos^3 A}$

$=\dfrac{\sin^3 A+\cos^3 A}{\sin^3 A+\cos^3 A}=1.$

উদা. 15. Simplify $\cos^2 B\operatorname{cosec}^2 A-\sin^2 B\cot^2 A$
$-\cos^2 B\cot^2 A+\sin^2 B\operatorname{cosec}^2 A.$ [C. U. '45]

প্রদত্ত রাশি $=\cos^2 B(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)+\sin^2 B(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)$
$=(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)(\cos^2 B+\sin^2 B)=1\times 1=1.$

উদা. 16. Simplify $\dfrac{\sec^4 A-2\sec^2 A\tan^2 A+\tan^4 A-1}{\operatorname{cosec}^4 A-2\operatorname{cosec}^2 A\cot^2 A+\cot^4 A}.$
[C. U. '41]

প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=\dfrac{(\sec^2 A-\tan^2 A)^2-1}{(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)^2}=\dfrac{(1)^2-1}{(1)^2}=\dfrac{1-1}{1}=0.$

উদা. 17. Simplify $\frac{1}{1+\sin^2 A}+\frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2 A}$.

প্রদত্ত রাশি $=\frac{1}{1+\sin^2 A}+\frac{1}{1+\frac{1}{\sin^2 A}}=\frac{1}{1+\sin^2 A}+\frac{1}{\frac{\sin^2 A+1}{\sin^2 A}}$

$=\frac{1}{1+\sin^2 A}+\frac{\sin^2 A}{1+\sin^2 A}=\frac{1+\sin^2 A}{1+\sin^2 A}=1.$

উদা. 18. Simplify $\frac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}+\frac{\cos A-\cos B}{\sin A+\sin B}$.

[C. U. '42, '44]

প্রদত্ত রাশি $=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B+\cos^2 A-\cos^2 B}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}$

$=\frac{(\sin^2 A+\cos^2 A)-(\sin^2 B+\cos^2 B)}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}$

$=\frac{1-1}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}=0.$

উদা. 19. If $x \sin^3\alpha+y\cos^3\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$, and $x\sin\alpha-y\cos\alpha=0$, then $x^2+y^2=1$. [C. U. '37 ; P. U. '43]

$\because\ x\sin\alpha-y\cos\alpha=0, \quad \therefore\ x\sin\alpha=y\cos\alpha.$

$\therefore\ \frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\sin\alpha}=k$ (মনে কর), $\therefore\ x=k\cos\alpha,\ y=k\sin\alpha.$

এক্ষণে $\because\ x\sin^3\alpha+y\cos^3\alpha=\sin\alpha\cos\alpha,$

$\therefore\ k\cos\alpha\sin^3\alpha+k\sin\alpha\cos^3\alpha=\sin\alpha\cos\alpha.$

বা, $k\sin\alpha\cos\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha.$

বা, $k\sin\alpha\cos\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$ [$\because\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$]

$\therefore\ k=1, \quad \therefore\ x=\cos\alpha$ এবং $y=\sin\alpha,$

$\therefore\ x^2+y^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$

Exercise 2

Prove the following :—

1. $\cos^4\theta-\sin^4\theta=2\cos^2\theta-1.$

2. $\frac{1}{\sin A\cos A}=\tan A+\cot A.$ [E. B. S. B. '48]

3. $\cos^6 A + \sin^6 A + 3\sin^2 A\cos^2 A = 1.$

4. $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta.$ [C. U. '43]

5. $\tan^2 A\cot A + \cot^2 A\tan A = \sec A\operatorname{cosec} A.$

6. $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta.$ [E. B. S. B. '50]

7. $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta.$

8. $\sec^4 A - 2\tan^2 A = 1 + \tan^4 A.$

9. $\operatorname{cosec}^4\theta - \cot^4\theta - 1 = 2\cot^2\theta.$

10. $\sin^2\theta(1+\cot^2\theta) + \cos^2\theta(1+\tan^2\theta) = 2$ [C. U. '51]

11. $\sec^2 A\operatorname{cosec}^2 A = \tan^2 A + \cot^2 A + 2.$ [C. U. '40]

12. $\sqrt{\dfrac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}} = \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta.$

13. $4\tan^2 A + 3 = 3\sec^2 A + \tan^2 A.$ 14. $1 + \dfrac{\cos A}{\sec A} + \dfrac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} = 2.$

14. (*a*) $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta.$ [G. U. '52]

15. $\operatorname{cosec}^2 A\cos^2 B - \cot^2 A\sin^2 B + \operatorname{cosec}^2 A\sin^2 B - \cot^2 A\cos^2 B = 1.$

16. $\sqrt{\sec^2 A - 1} = \sin A\sec A.$ 17. $\dfrac{\tan\theta + \cot A}{\cot\theta + \tan A} = \cot A\tan\theta.$

18. $\dfrac{\sec^4\theta - 2\sec^2\theta\tan^2\theta + \tan^4\theta}{\operatorname{cosec}^4\theta - 2\operatorname{cosec}^2\theta\cot^2\theta + \cot^4\theta} = 1.$ [C. U. '42]

19. $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A.$

20. $(\tan A + \sec A)^2 = \dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}.$ [C. U. '34]

21. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A + \cot A} + \dfrac{1}{\operatorname{cosec} A - \cot A} = 2\operatorname{cosec} A.$

22. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta} - \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta}.$

23. $(1+\tan^2 A)(1-\sin^2 A)=1.$ [C. U.]

24. $(1+\tan\theta-\sec\theta)(1+\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta)=2.$

25. $\dfrac{1}{1+\cos^2 A}+\dfrac{1}{1+\sec^2 A}=1.$

26. $\dfrac{\cot A+1}{\cot A-1}=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}.$ 27. $1+\dfrac{\tan^2\theta}{1+\sec\theta}=\sec\theta.$

28. $\dfrac{\cos A+\cos B}{\sin A+\sin B}=\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos B-\cos A}.$

29. $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}+\dfrac{1+\sin A}{\cos A}=2\sec A.$

30. $\dfrac{\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta-1}{\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta+1}=\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}.$

31. $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1=0.$

32. $\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A-1}+\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A+1}=2\sec^2 A.$ [W.B.S.F. '53]

Simplify :—

33. $\dfrac{\sin A}{\operatorname{cosec} A}+\dfrac{\cos A}{\sec A}+1.$ 34 $\dfrac{1-\tan\theta}{\cot\theta-1}-\dfrac{1+\tan\theta}{\cot\theta+1}.$

35. $\dfrac{\sec^4 A-2\sec^2 A\tan^2 A+\tan^4 A}{\sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta}.$ [G. U. '49]

36. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A-\cot A}+\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A+\cot A}-\dfrac{2}{\sin A}.$

37. $\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}+\dfrac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}.$

38. $\dfrac{\sec A-\sec B}{\tan B+\tan A}+\dfrac{\tan B-\tan A}{\sec A+\sec B}.$

39. If $7\sin^2\theta+3\cos^2\theta=4$, show that $\tan\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$
[C. U. '38]

40. Prove that $\sin\theta(1+\tan\theta)+\cos\theta(1+\cot\theta)$
$=\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta.$ [C. U. '35]

41. If $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$, then $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$. [B. H. U. '46]

83. কোণানুপাতগুলিকে উহাদের কোন একটি অনুপাত দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

(1) Express all the trigonometrical ratios in terms of the sine.

[প্রথম প্রণালী] $\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\therefore \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$,

$$\therefore \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta};$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}; \quad \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}.$$

[অন্য প্রণালী] (৫নং চিত্রে) মনে কর, $\angle AOP = \theta$, $OP = 1$ (একক) এবং $PM = a$ একক।

$$\therefore \sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{1} = a.$$

$$\because OP^2 = PM^2 + OM^2, \therefore OM^2 = OP^2 - PM^2, \therefore OM = \sqrt{1-a^2}$$

এক্ষণে, $\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1} = \sqrt{1-\sin^2\theta}$,

$\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$, ইত্যাদি।

[**দ্রষ্টব্য :** যে অনুপাতে প্রকাশ করিতে হইবে তাহার মান যেন a দৈর্ঘ্য একক হয় এরূপভাবে ত্রিভুজের বাহুগুলির মান ধরিবে।]

(2) Express all trigonometrical ratios in terms of the tangent.

(৫নং চিত্রে) মনে কর, $PM = a$ এবং $OM = 1$, সুতরাং $\tan\theta = \frac{PM}{OM} = a$.

$$\because OP^2 = OM^2 + PM^2, \quad \therefore OP = \sqrt{OM^2 + PM^2} = \sqrt{1+a^2}.$$

এক্ষণে, $\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$,

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}; \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta};$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1+\tan^2\theta}; \quad \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}.$$

84. কোন প্রদত্ত কোণানুপাত হইতে অন্য কোণানুপাতগুলি নির্ণয়।

উদা. 1. If $\sin A = \frac{1}{3}$, find $\cos A$, $\tan A$ and $\sec A$.

একণে $\sin A = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{1}{3}$.

(৫নং চিত্রে) মনে কর, $PM = 1$ দৈর্ঘ্য একক এবং $OP = 3$ দৈর্ঘ্য একক।

$\therefore \quad OM^2 = OP^2 - PM^2 = 9 - 1 = 8; \quad \therefore \quad OM = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

একণে $\cos A = \frac{OM}{OP} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan A = \frac{PM}{OM} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

এবং $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

উদা. 2. If $\cos x = \frac{2}{3}$, find $\tan x$, $\sec x$ and $\operatorname{cosec} x$.

[D. B. '48]

(৫নং চিত্রে) মনে কর, $OM = 2$ দৈর্ঘ্য একক এবং $OP = 3$ দৈর্ঘ্য একক।

অতএব, $PM^2 = OP^2 - OM^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$, $\therefore PM = \sqrt{5}$.

একণে, $\tan x = \frac{PM}{OM} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sec x = \frac{OP}{OM} = \frac{3}{2}$;

এবং $\operatorname{cosec} x = \frac{OP}{PM} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

উদা. 3. The tangent of an angle is $\frac{3}{4}$; find tne other trigonometrical ratios.

এখানে $\tan \theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{3}{4}$.

৫নং চিত্রে মনে কর, $PM = 3$ দৈর্ঘ্য একক এবং $OM = 4$ দৈর্ঘ্য একক।

$\therefore \quad OP^2 = PM^2 + OM^2 = 3^2 + 4^2 = 25, \quad \therefore \quad OP = 5.$

একণে $\sin \theta = \frac{PM}{OP} = \frac{3}{5}$, $\cos \theta = \frac{OM}{OP} = \frac{4}{5}$, $\cot \theta = \frac{OM}{PM} = \frac{4}{3}$,

$\sec \theta = \frac{OP}{OM} = \frac{5}{4}$ এবং $\operatorname{cosec} \theta = \frac{OP}{PM} = \frac{5}{3}$.

উদা. 4. If $\cos\theta=\frac{3}{5}$, where θ is a positive acute angle, find $\cot\theta$.

এখানে $\cos\theta=\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{3}{5}$. ৫নং চিত্রে মনে কর, $OM=3$ দৈর্ঘ্য একক এবং $OP=5$ দৈর্ঘ্য একক। $\because PM^2+OM^2=OP^2$,

$\therefore PM^2=OP^2-OM^2=5^2-3^2=16$, $\therefore PM=4$.

$\therefore \cot\theta=\frac{OM}{PM}=\frac{3}{4}$.

উদা. 5. If cosine of an acute angle is $\sqrt{1-a^2}$, find its sine and show that its cotangent is $\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$.

মনে কর, কোণটি θ, সুতরাং $\cos\theta=\sqrt{1-a^2}$ (স্বীকার)।

$\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\therefore \sin^2\theta+(\sqrt{1-a^2})^2=1$,

বা, $\sin^2\theta+1-a^2=1$, বা, $\sin^2\theta=a^2$, $\therefore \sin\theta=a$.

আবার, $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$.

উদা. 6. If the tangent of an acute angle is c, prove that its $\text{sine}=\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$. [C. U. '42]

মনে কর, প্রদত্ত কোণটি θ, সুতরাং $\tan\theta=\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}=c$.

(৫নং চিত্রে) মনে কর, $PM=c$ দৈর্ঘ্য একক এবং $OM=1$ দৈর্ঘ্য একক।

$\therefore OP^2=PM^2+OM^2=c^2+1$, $\therefore OP=\sqrt{1+c^2}$.

এক্ষণে, $\sin\theta=\frac{PM}{OP}=\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$.

[অন্য প্রণালী] $\because$ $\tan\theta = c$, $\therefore$ $\cot\theta = \frac{1}{c}$.

এক্ষণে, $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta = 1 + \frac{1}{c^2} = \frac{c^2+1}{c^2}$

$\therefore$ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}$, $\therefore$ $\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$.

উদা. 7. If $\tan\theta = \sqrt{3}$, show that $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

[উদা. 3এর মত কর। মনে কর, PM = $\sqrt{3}$ দৈর্ঘ্য একক এবং OM = 1 দৈর্ঘ্য একক।]

Exercise 3

1. Express all other trigonometrical ratios in terms of the cosine.

2. If $\sin A = \frac{3}{5}$, find tan A and sec A.

3. If $\cos A = \frac{12}{13}$, find cot A and cosec A.

4. If $\tan A = \frac{3}{4}$, find sin A and sec A.

5. If $\cot A = \sqrt{7}$, find the value of $\frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$

6. If $\sec A = \frac{61}{11}$, find tan A and cosec A.

7. If $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, prove that $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

8. If $\cos\theta = \frac{3}{5}$, show that $\tan\theta = \frac{4}{3}$.

9. If $\sec A = \frac{4}{3}$, show that $\cot A = \frac{3}{\sqrt{7}}$

10. If $\cot A = \frac{x}{y}$, show that $\operatorname{cosec} A = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$.

11. If $\operatorname{cosec} A = \frac{a}{b}$, show that $\tan A = \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

12. Sine of an acute angle is x. Prove that its cosine $\sqrt{1-x^2}$ and its tangent $=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. [C.U.'41 ; E.B S.B.'51]

13. The tangent of an angle is $\frac{4}{3}$, find other direct trigonometrical ratios. [E. B. S. B. '51]

14. If $\cot A+\operatorname{cosec} A=3$, find $\cos A$.

15. If $\tan A+\sec A=\frac{2}{\sqrt{3}}$, find $\sin A$.

16. If $\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{12}{13}$, where A and B are positive acute angles, find the value of $\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A \tan B}$.

[W. B. S. F. '58]

85. কয়েকটি নির্দিষ্ট কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

(i) 30° কোণের কোণানুপাতগুলি নির্ণয় কর।

মনে কর, $\angle AOB=30^\circ$ এবং $PM\perp OA$. এখন $\angle OPM=60^\circ$ হইল। PMকে Q পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত কর যেন $MQ=PM$ হয়। QO যোগ কর।

POM ও QOM ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম ;

কারণ, $PM=MQ$, OM বাহু সাধারণ এবং $\angle OMP=\angle OMQ$ (সমকোণ বলিয়া) ;

$\therefore \angle QOM=30^\circ$, $\therefore \angle POQ=60^\circ$.

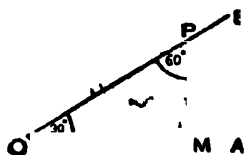
৭নং চিত্র

$\because$ OPQ ত্রিভুজের $\angle P$ ও $\angle POQ$ প্রত্যেকে 60°, $\therefore \angle Q=60^\circ$,

$\therefore$ POQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ। $\therefore PO=PQ=2PM$, $\therefore PM=\frac{1}{2}OP$.

আবার, $OM^2=OP^2-PM^2=OP^2-(\frac{1}{2}OP)^2=OP^2-\frac{1}{4}OP^2=\frac{3}{4}OP^2$,

$\therefore OM=\frac{\sqrt{3}}{2}OP$. $\sin 30^\circ=\frac{PM}{OP}=\frac{\frac{1}{2}OP}{OP}=\frac{1}{2}$;

সুতরাং $\operatorname{cosec} 30^\circ=\frac{1}{\sin 30^\circ}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$

$$\cos 30^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}OP}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

সুতরাং $\sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$

$$\tan 30^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{\frac{1}{2}OP}{\frac{\sqrt{3}}{2}OP} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

সুতরাং $\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}.$

(2) 60° কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

(৭নং চিত্রে) $\angle OPM = 60^\circ$, উহার সম্পর্কে লম্ব $= OM = \frac{\sqrt{3}}{2}OP$,

ভূমি $= PM = \frac{1}{2}OP$ এবং অতিভুজ $= OP$.

$\therefore \sin 60^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}OP}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; সুতরাং $\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

$\cos 60^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{\frac{1}{2}OP}{OP} = \frac{1}{2}$; সুতরাং $\sec 60^\circ = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$

$\tan 60^\circ = \frac{OM}{PM} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}OP}{\frac{1}{2}OP} = \sqrt{3}$; সুতরাং $\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

[দ্রষ্টব্য : $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$, $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$, $\tan 30^\circ = \cot 60^\circ$, $\cot 30^\circ = \tan 60^\circ$, $\operatorname{cosec} 30^\circ = \sec 60^\circ$, $\sec 30^\circ = \operatorname{cosec} 60^\circ$.]

(3) 45° কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

(৫নং চিত্রে) মনে কর, $\angle AOB = 45^\circ$; OB-স্থিত P বিন্দু হইতে $PM \perp AO$ টানা হইল। সুতরাং $\angle OMP = 90^\circ$. $\therefore$ অবশিষ্ট $\angle OPM = 45^\circ = \angle AOB$.

$\therefore \quad OM = PM$. আবার, $OP^2 = OM^2 + PM^2 = 2PM^2 = 2MO^2$.

$\therefore \quad PM^2 = \frac{1}{2}OP^2, \quad \therefore \quad PM = \frac{1}{\sqrt{2}}OP$ এবং $OM = \frac{1}{\sqrt{2}}OP$.

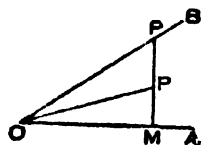
$$\therefore\ \sin 45^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}OP}{OP} = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \text{সুতরাং } \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}.$$

$$\cos 45^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}OP}{OP} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \text{সুতরাং } \sec 45^\circ = \sqrt{2}.$$

$$\tan 45^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{OM}{OM} = 1,\ \text{সুতরাং } \cot 45^\circ = 1.$$

(4) 0° কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

৮নং চিত্র

মনে কর, ∠AOB একটি সূক্ষ্ম কোণ এবং OB-স্থিত P বিন্দু হইতে PM⊥OA. এখন দেখ, ∠AOB ক্রমশঃ যত ছোট হইবে, PM লম্ব এবং অতিভুজ OP ক্রমশঃ তত ছোট হইবে। এইরূপে ∠AOB = 0° হইলে, OP এবং OM মিশিয়া গিয়া PM = 0 এবং OP = OM হইবে।

$$\therefore\ \sin 0^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{0}{OP} = 0,\ \cos 0^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{OM} = 1,$$

$$\tan 0^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{0}{OM} = 0,\ \cot 0^\circ = \frac{OM}{PM},$$ এখানে OM একটি সসীম রাশি এবং PM অসীমরূপে ক্ষুদ্র অর্থাৎ 0 বলিয়া $\frac{OM}{PM}$ = অসীম বৃহৎরাশি অর্থাৎ ∞ হইবে। $\therefore\ \cot 0^\circ = \infty$ (infinity).

অতএব, $\operatorname{cosec} \theta = \frac{OP}{PM} = \infty$, এবং $\sec \theta = \frac{OP}{OM} = 1.$

(5) 90° কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

৯নং চিত্র

মনে কর, ∠AOB একটি সূক্ষ্মকোণ এবং OB-স্থিত P বিন্দু হইতে PM⊥OA. এখন এই কোণটি ক্রমশঃ যতই বড় হইবে, OM ক্রমশঃ ততই ছোট এবং PM ক্রমশঃ OP-র নিকটতর হইতে থাকিবে। এইভাবে ∠AOB = 90° হইলে, তখন OB⊥OA হইবে এবং PM ও OP মিশিয়া OM = 0 এবং PM = OP হইবে।

$$\sin 90° = \frac{PM}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1, \ \cos 90° = \frac{OM}{OP} = \frac{0}{OP} = 0;$$

$$\tan 90° = \frac{PM}{OM} = \frac{\text{একটি সসীম রাশি}}{\text{একটি অসীম ক্ষুদ্র রাশি}} = \infty,$$

সুতরাং $\cot 90° = \frac{OM}{PM} = \frac{0}{OP} = 0.$

$\operatorname{cosec} 90° = \frac{OP}{PM} = \frac{PM}{PM} = 1$, এবং $\sec 90° = \frac{OP}{OM} = \infty.$

[দ্রষ্টব্য : $\sin 0° = 0 = \cos 90°$; $\sin 90° = 1 = \cos 0°$;
$\tan 90° = \rightarrow \infty = \cot 0°$, $\operatorname{cosec} 0° = \rightarrow \infty = \sec 90°$]

89. 0°, 30°, 45°, 60° ও 90° কোণগুলির ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান মনে রাখিতে হইবে। নিম্নে তালিকা দেখ—

কোণ	0°	30°	45°	60°	90°
সাইন	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
কস	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
ট্যান	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

[দ্রষ্টব্য : Sine ও cos জানা থাকিলে অন্যান্য কোণানুপাতগুলি সহজেই নির্ণয় করা যায়। আবার দেখ, 0°, 30° ও 45° কোণের কেবল sine ও cos জানা থাকিলে, তাহা হইতে তালিকার অন্যান্য কোণের কোণানুপাতগুলি নির্ণয় করা যায়। অতএব ঐগুলি মুখস্থ রাখিবে। Sine-এর মান মনে রাখিবার কৌশল আছে। 0, 1, 2, 3 ও 4 লিখিয়া প্রত্যেকটিকে 4 দিয়া ভাগ করিয়া তারপর বর্গমূল নির্ণয় কর। এই বর্গমূলগুলিই অর্থাৎ $\sqrt{\frac{0}{4}}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{2}{4}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{\frac{4}{4}}$ যথাক্রমে 0°, 30°, 45°, 60° ও 90° কোণের sine হইবে।]

87. পূরক কোণের কোণানুপাত নির্ণয়।

কোন কোণের সাইন, তাহার পূরক কোণের কসের সমান হয়

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$, $\cot(90°-\theta)=\tan\theta$,

$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$, $\sec(90°-\theta)=\operatorname{cosec}\theta$

$\tan(90°-\theta)=\cot\theta$, $\operatorname{cosec}(90°-\theta)=\sec\theta$.

বিবিধ প্রশ্নের সমাধান

উদা. 1. Verify that $\sin^2 30°+\sin^2 45°+\cos^2 60°=1$

বামপক্ষ $=(\frac{1}{2})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1.$

উদা. 2. Show that $\cos 60°=1-2\sin^2 30°$. [E.B.S.B. '49]

$\cos 60°=\frac{1}{2}$;

আবার $1-2\sin^2 30°=1-2\times(\frac{1}{2})^2=1-2\times\frac{1}{4}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

$\therefore\ \cos 60°=1-2\sin^2 30°$.

উদা. 3. Prove that $\frac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°}=\sqrt{3}$. [C. U. '40]

বামপক্ষ $=\dfrac{2\times\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{2}=\sqrt{3}.$

উদা. 4. Find the numerical value of $\tan^2 30°+2\sin 60°+\tan 45°-\tan 60°+\cos^2 30°$. [G. U. '48]

প্রদত্ত রাশি $=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\sqrt{3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$=\frac{1}{3}+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+\frac{3}{4}=\frac{1}{3}+1+\frac{3}{4}=\frac{25}{12}=2\frac{1}{12}.$

উদা. 5. Find the numerical value of
$\sin^3 30°+4 \cot^2 45°-\sec^2 60°$. [C. U. '50]

প্রদত্ত রাশি $=(\frac{1}{2})^3+4.(1)^2-(2)^2=\frac{1}{8}+4-4=\frac{1}{8}$.

উদা. 6. Find the numerical value of
$\tan^2 45°. \sin 60°. \tan 30°. \tan^2 60°$. [C. U. '49]

প্রদত্ত রাশি $=(1)^2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\frac{1}{\sqrt{3}}.(\sqrt{3})^2=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times3=1\frac{1}{2}$.

উদা. 7. Find simplest value of
$3 \tan^2 45°-\sin^2 60°-\frac{1}{2}\cot^2 30°+\frac{1}{8}\sec^2 45°$. [C. U. '51]

প্রদত্ত রাশি $=3.(1)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}.(\sqrt{3})^2+\frac{1}{8}(\sqrt{2})^2$

$=3-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=1$.

উদা 8. If $\tan\theta=\frac{3}{4}$, find the other trigonometrical ratios.

মনে কর, AOB সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ এবং $\angle O=\theta$.

$\because$ $\tan\theta=\frac{3}{4}$, $\therefore$ লম্ব $AB=3$ হইলে, ভূমি $OA=4$ হইবে।

$\therefore$ $OB^2=3^2+4^2=25$, $\therefore$ $OB=\sqrt{25}=5$.

এক্ষণে, $\sin\theta=\frac{AB}{OB}=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{OA}{OB}=\frac{4}{5}$, $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$,

$\text{cosec}\,\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{3}$ এবং $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{4}$.

উদা. 9. Prove that $\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{1-\cos 30°}}=\sec 60°+\tan 60°$.
[C. U. '42]

বামপক্ষ $=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}}$

$=\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{1}}=2+\sqrt{3}$.

আবার, ডানপক্ষ $\sec 60°+\tan 60°=2+\sqrt{3}$. $\therefore$ উভয় পক্ষ সমান।

উদা. 10. Show that $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{2}$.

এখানে কোণগুলির বৃত্তীয় মান দেওয়া আছে। π রেডিয়ান $=180°$,

$\therefore$ বামপক্ষ $=\sin 60°\cos 30°+\sin 30°\tan 45°$

$$=\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{2}\times1=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}=1\tfrac{1}{4},$$

এবং ডানপক্ষ $=\sin 30°\cos 60°+\sin 90°=\frac12\times\frac12+1=\frac14+1=1\frac14$.

$\therefore$ উভয় পক্ষ সমান।

উদা. 11. Show that $\frac{1+2\sin 60°\cos 60°}{\sin 60°+\cos 60°}+\frac{1-2\sin 60°\cos 60°}{\sin 60°-\cos 60°}$ $=2\cos 30°$. [C. U. '41]

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{1+2.\frac{\sqrt3}{2}.\frac12}{\frac{\sqrt3}{2}+\frac12}+\frac{1-2.\frac{\sqrt3}{2}.\frac12}{\frac{\sqrt3}{2}-\frac12}=\frac{1+\frac{\sqrt3}{2}}{\frac{\sqrt3+1}{2}}+\frac{1-\frac{\sqrt3}{2}}{\frac{\sqrt3-1}{2}}$$

$$=\frac{\frac{2+\sqrt3}{2}}{\frac{\sqrt3+1}{2}}+\frac{\frac{2-\sqrt3}{2}}{\frac{\sqrt3-1}{2}}=\frac{2+\sqrt3}{\sqrt3+1}+\frac{2-\sqrt3}{\sqrt3-1}$$

$$=\frac{(2+\sqrt3)(\sqrt3-1)+(2-\sqrt3)(\sqrt3+1)}{(\sqrt3+1)(\sqrt3-1)}$$

$$=\frac{2\sqrt3+3-2-\sqrt3+2\sqrt3-3+2-\sqrt3}{3-1}=\frac{2\sqrt3}{2}=\sqrt3.$$

ডানপক্ষ $=2\cos 30°=2\times\frac{\sqrt3}{2}=\sqrt3$. $\therefore$ উভয় পক্ষ সমান।

উদা. 12. Simplify : $\frac{2\tan^2 30°}{1-\tan^2 30°}+(\sec^2 45°-\cot^2 45°)$ $-(\sin^2 30°+\sin^2 60°)$. [G. U. '50]

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\frac{2\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)^2}+\{(\sqrt2)^2-(1)^2\}-\left\{\left(\frac12\right)^2+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{\frac23}{1-\frac13}+\{2-1\}-\{\tfrac14+\tfrac34\}=\frac{\frac23}{\frac23}+1-1=\frac{2\times3}{3\times2}=1.$$

Exercise 4

1. Prove that :—

   (1) $\cos 60° = \frac{1}{2}$ and $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [C. U. '41]

   (2) $\tan 60° = \sqrt{3}$ and $\operatorname{cosec} 30° = 2$ [C. U. '43, '45]

   (3) $\cot 30° = \sqrt{3}$ and $\sin 90° = 1$ [C. U. '44]

   (4) $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (5) $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ [G. U. 51]

2. Find the value of $\cos 60°$, $\sec 30°$ and $\cot 60°$. [C. U. '47]

3. Find the value of $4 \sin^2 45° + \tan^2 60° + \operatorname{cosec}^2 30°$. [C. U. '40]

4. Find the numerical value of $\cot^2 \frac{\pi}{4} + \sin^3 \frac{\pi}{6} - \cos^3 \frac{\pi}{3}$.

5. Find the simplest value of $4 \sin^2 30° + 2 \cos^2 45° - 3 \cos^2 60°$.

6. Simplify $\frac{\sec^2 45° - \cot^2 45°}{\sin^2 60° + \cos^2 30°} + \frac{\sin^2 90° - \cos^2 60°}{\frac{1}{4} \tan^2 30°}$.

7. Prove that $\tan 30° . \sin 60° + \tan 60° . \cos 30° = 2$.

8. Prove that $\sin \frac{\pi}{3} . \tan \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{2} . \cos \frac{\pi}{3} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{4}$.

9. Show that $\sqrt{\frac{1 + \sin 30°}{1 - \sin 30°}} = \sec 60° \sin 60°$.

10. Prove that

$$\frac{1 + 2 \sin 60° \cos 60°}{\sin 60° + \cos 60°} + \frac{1 - 2 \sin 60° \cos 60°}{\sin 60° - \cos 60°} = 2 \cos 30°.$$

[C. U. '41]

11. Find the value of $\cot^2 30° - 2 \cos^2 60° - \frac{3}{4} \sec^2 45° - 4 \sin^2 30°$. [W. B. S. F. '52]

12. Find the value of $\frac{\tan 60° - \tan 30°}{1+\tan 60° \tan 30°} + \cos 60° \cos 30°$ $+\sin 60° \sin 30°$. [W. B. S. F. '53]

13. Find the value of $\frac{1-\sin^2 30°}{1+\sin^2 45°} \times \frac{\cos^2 60° + \cos^2 30°}{\operatorname{cosec}^2 90° - \cot^2 90°} \div$ $(\sin 60° \tan 30°)$. [G. U. '54]

88. অপনয়ন (Elimination)

উদা. 1. Eliminate A from the equations $x=a \sin A$, $y=b \cos A$.

$\because x=a \sin A$, $\therefore \frac{x}{a}=\sin A$; এবং $\because y=b \cos A$, $\therefore \frac{y}{b}=\cos A$

এক্ষণে, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2 A+\cos^2 A=1$. $\therefore \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

উদা. 2. Eliminate B from $x=a \sin B$, $y=\frac{a}{\sec B}$.

$$\because x=a \sin B, \quad \therefore \frac{x}{a}=\sin B.$$

আবার, $\because y=\frac{a}{\sec B}$ $\therefore y=a \times \frac{1}{\sec B}=a \cos B$,

$$\therefore \frac{y}{a}=\cos B.$$

এক্ষণে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\sin^2 B+\cos^2 B=1$, $\therefore x^2+y^2=a^2$.

উদা. 3. If $x=a \sec \theta$, $y=b \tan \theta$, prove that $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

[G. U. '51]

$$\because x=a \sec \theta, \quad \therefore \frac{x}{a}=\sec \theta, \quad \therefore \frac{x^2}{a^2}=\sec^2\theta ;$$

$$\because y=b \tan \theta, \quad \therefore \frac{y}{b}=\tan \theta, \quad \therefore \frac{y^2}{b^2}=\tan^2\theta ;$$

এক্ষণে, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\sec^2\theta-\tan^2\theta=1+\tan^2\theta-\tan^2\theta=1.$

$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

উদা. 4. If $\sin\theta+\cos\theta=a$ and $\tan\theta+\cot\theta=b$, show that $b(a^2-1)=2$.

$\tan\theta+\cot\theta=b$, বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=b$, বা, $\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=b$,

বা, $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=b$, $\therefore \quad \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{b}\cdots(1)$.

আবার, $\because \sin\theta+\cos\theta=a$, $\therefore \sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=a^2$,

বা, $1+2\sin\theta\cos\theta=a^2$, বা, $2\sin\theta\cos\theta=a^2-1\cdots(2)$.

$\therefore$ (1) ও (2) হইতে $2\times\frac{1}{b}=a^2-1$, বা, $\frac{2}{b}=a^2-1$, $\therefore \; b(a^2-1)=2.$

উদা. 5. If $\sin A+\cos A=m$, and $\sec A+\operatorname{cosec} A=n$, prove that $n(m^2-1)=2m$. [B. U.]

$n(m^2-1)=(\sec A+\operatorname{cosec} A)\{(\sin A+\cos A)^2-1\}$

$=\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\sin A}\right)(\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A\cos A-1)$

$=\left(\frac{\sin A+\cos A}{\cos A\sin A}\right)(1+2\sin A\cos A-1)$

$=\frac{m}{\sin A\cos A}\times 2\sin A\cos A=2m.$

উদা. 6. If $\tan A+\sin A=m$, and $\tan A-\sin A=n$, prove that $m^2-n^2=4\sqrt{mn}$. [C. U. '14]

এখানে $m+n=\tan A+\sin A+\tan A-\sin A=2\tan A$,

এবং $m-n=2\sin A$.

আবার, $mn=(\tan A+\sin A)(\tan A-\sin A)=\tan^2 A-\sin^2 A$

$$=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}-\sin^2 A=\sin^2 A\left(\frac{1}{\cos^2 A}-1\right)=\sin^2 A\left(\frac{1-\cos^2 A}{\cos^2 A}\right)$$

$$=\sin^2 A\times\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\sin^2 A\tan^2 A.\quad\therefore\quad\sqrt{mn}=\sin A\tan A.$$

এক্ষণে, $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$

$$=2\tan A.\,2\sin A=4\tan A\sin A=4\sqrt{mn}.$$

উদা. 7. If $\sin A=m$ and $\tan A=n$, proved that $\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}=1.$

এখানে $\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{m}$ এবং $\frac{1}{\tan A}=\frac{1}{n}$, $\therefore\ \frac{1}{\sin^2 A}=\frac{1}{m^2}$ এবং $\frac{1}{\tan^2 A}=\frac{1}{n^2}$.

$\therefore\ \frac{1}{\sin^2 A}-\frac{1}{\tan^2 A}=\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}$, বা, $\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A=\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}$,

বা, $1+\cot^2 A-\cot^2 A=\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}$, $\therefore\ \frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}=1.$

Exercise 5

Eliminate θ from the following equations :—

1. $x=a\sin\theta$ and $y=b\cos\theta$.
2. $x=b\cos\theta,\ y=b\sin\theta$.
3. $x=a(\sec\theta+\tan\theta),\ y=a(\sec\theta-\tan\theta)$.
4. $a=b(\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta),\ c=b(\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta)$.
5. $x=a\tan\theta,\ y=b\cot\theta$.
6. If $\sin A=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}$, show that $n\cos A=m\sin A$.
7. If $\cos\theta=p$ and $\cot\theta=q$, show that $\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}=1.$
8. If $\cos\theta=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$, show that $\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta=\frac{p}{q}$.

[Hints : আগে $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ হইতে $\cos\theta$র মান বসাইয়া $\sin\theta$র মান নির্ণয় কর। $\sin\theta=\frac{2pq}{p^2+q^2}$ হইবে। তারপর $\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$ $=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ধর।...]

9. If $\sin\theta-\cos\theta=1$, show that $\sin\theta+\cos=\pm1$.

10. If $\sin\theta=\frac{2mn}{m^2+n^2}$, show that $\sec\theta+\tan\theta=\frac{m+n}{m-n}$.

89. বিবিধ সমীকরণের সমাধান।

উদা 1. Solve $2\cos\theta=\sec\theta$.

$2\cos\theta=\sec\theta$, বা $2\cos\theta=\frac{1}{\cos\theta}$, বা $2\cos^2\theta=1$, বা $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$,

বা, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$; কিন্তু $\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\therefore\ \cos\theta=\cos 45°$.

$\therefore\ \theta=45°$.

[**দ্রষ্টব্য : মানের সীমা :** $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ এই সূত্র হইতে আমরা জানি যে $\sin^2\theta$ ও $\cos^2\theta$ প্রত্যেকটি পূর্ণবর্গ বলিয়া ধনাত্মক, উহা ঋণাত্মক (negative) হইতে পারে না। অতএব, $\sin^2\theta$ বা $\cos^2\theta$ কোনটিরই মান 1 অপেক্ষা বেশী হইতে পারে না। কারণ, উহাদের সমষ্টি 1 বলিয়া কোনটির মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে অন্যটির মান ঋণাত্মক হইয়া পড়িবে, কিন্তু তাহা অসম্ভব। অতএব, θ কোণের পরিমাণ যাহাই হউক না কেন, $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ এর সাংখ্যমান কখনও 1এর অধিক (2, -2, $+3{\cdot}5$ এইরূপ) হইতে পারে না। যদি $\sin\theta$ বা $\cos\theta$ কোনটির মান -2, -3 প্রভৃতি হয়, তবে সেটির বর্গের মান 4, 9 প্রভৃতি হইবে এবং তখন অপরটির বর্গের ($\sin^2\theta$ বা $\cos^2\theta$) মান ঋণাত্মক হইবে, কিন্তু তাহা অসম্ভব। অতএব $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ এর মানের সীমা -1 হইতে $+1$ পর্যন্ত হইবে। তাহা হইলে উহাদের অন্যোন্যক বলিয়া $\sec\theta$ ও $\operatorname{cosec}\theta$ এর সাংখ্যমান কখন 1 এর কম হইতে পারে না। $\tan\theta$ ও $\cot\theta$ এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর বা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে।]

উদা. 2. If $2 \sin A = 2 - \cos A$, find $\sin A$.

$2 \sin A = 2 - \cos A$,

বা, $2 \sin A - 2 = -\cos A$, বা $(2 \sin A - 2)^2 = (-\cos A)^2$,

বা, $4 \sin^2 A - 8 \sin A + 4 = \cos^2 A = 1 - \sin^2 A$,

বা, $5 \sin^2 A - 8 \sin A + 3 = 0$,

বা, $5 \sin^2 A - 5 \sin A - 3 \sin A + 3 = 0$,

বা, $(\sin A - 1)(5 \sin A - 3) = 0$, $\therefore$ $\sin A = 1$, বা $\frac{3}{5}$.

উদা. 3. If $2 \sin^2\theta = 3 \cos \theta$; find θ, if it be a positive acute angle. [C. U. '50]

$2 \sin^2 \theta = 3 \cos \theta$, বা, $2(1 - \cos^2 \theta) = 3 \cos \theta$,

বা, $2 \cos^2\theta + 3 \cos \theta - 2 = 0$,

বা, $2 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta - \cos \theta - 2 = 0$,

বা, $(2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 2) = 0$, $\therefore$ $\cos \theta = \frac{1}{2}$, বা -2,

প্রদত্ত সর্ত অনুসারে $\cos \theta$-র মান -1 অপেক্ষা ছোট বা $+1$ অপেক্ষা বড় হইতে পারে না বলিয়া $\cos \theta = -2$ হইতে পারে না।

$\therefore$ $\cos \theta = \frac{1}{2} = \cos 60°$. $\therefore$ $\theta = 60°$.

উদা. 4. Solve $\sin \theta + \operatorname{cosec} \theta = \frac{7}{2\sqrt{3}}$, if θ be a positive acute angle.

$\sin \theta + \operatorname{cosec}\theta = \frac{7}{2\sqrt{3}}$, বা, $\sin \theta + \frac{1}{\sin \theta} = \frac{7}{2\sqrt{3}}$,

বা, $\sin^2 \theta + 1 = \frac{7 \sin \theta}{2\sqrt{3}}$ [$\sin \theta$ দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $2\sqrt{3} \sin^2\theta + 2\sqrt{3} = 7 \sin \theta$,

বা, $2\sqrt{3} \sin^2\theta - 7 \sin \theta + 2\sqrt{3} = 0$,

বা, $2\sqrt{3} \sin^2\theta - 4 \sin \theta - 3 \sin \theta + 2\sqrt{3} = 0$,

বা, $2 \sin \theta (\sqrt{3} \sin \theta - 2) - \sqrt{3}(\sqrt{3} \sin \theta - 2) = 0$,

বা, $(2 \sin \theta - \sqrt{3})(\sqrt{3} \sin \theta - 2) = 0$;

$\therefore$ $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ বা $\frac{2}{\sqrt{3}}$. এখানে যেহেতু প্রদত্ত সর্ত অনুসারে $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ হইতে পারে না, $\therefore$ $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60°$, $\therefore$ $\theta = 60°$.

উদা. 5. Solve $\cos 12A = \sin 6A$.

কোন কোণের sine তাহার অনুপূরক কোণের cosine-এর সমান হয়।

$\therefore \cos 12A = \sin 6A = \cos(90° - 6A)$

$\therefore 12A = 90° - 6A$, বা, $18A = 90°$, $\therefore A = 5°$.

উদা. 6. If $r\cos\theta = 2\sqrt{3}$ and $r\sin\theta = 2$, where θ is an acute angle, find r and θ. [C. U. '45 ; G. U. '49]

$\because r\cos\theta = 2\sqrt{3} \cdots(1)$ এবং $r\sin\theta = 2 \cdots(2)$

$\therefore$ (1)÷(2) করিয়া পাই $\frac{r\cos\theta}{r\sin\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$, বা $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}$,

বা, $\cot\theta = \sqrt{3} = \cot 30°$. $\therefore \theta = 30°$.

এক্ষণে (1) হইতে পাই $r\cos 30° = 2\sqrt{3}$, বা, $r.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$,

$\therefore r = \frac{2\sqrt{3} \times 2}{\sqrt{3}} = 4$. অতএব, $r = 4$ এবং $\theta = 30°$.

[G. U. '52 এর এই প্রশ্নেই $r\cos\theta = 2$, $r\sin\theta = 2\sqrt{3}$ ছিল।
উত্তর : $r = 4$, $\theta = 60°$]

উদা. 7. If $\tan^2 45° - \cos^2 60° = x \sin 45° \cos 45° \tan 60°$, find the value of x. [C. U. '49]

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাই $(1)^2 - (\frac{1}{2})^2 = x.\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{3}$,

বা, $1 - \frac{1}{4} = x.\frac{\sqrt{3}}{2}$, বা, $\frac{3}{4} = x.\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore x = \frac{3}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

উদা. 8. Solve $\frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

Comp. & dividendo দ্বারা পাই $\frac{2\sin A}{2\cos A} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$, বা, $\frac{\sin A}{\cos A} = \sqrt{3}$,

বা, $\tan A = \sqrt{3} = \tan 60°$, $\therefore A = 60°$.

উদা. 9. If $1+\sin^2 A=3 \sin A \cos A$, find $\tan A$ and deduce that one value of $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$. [C. U, '50]

$1+\sin^2 A=3 \sin A \cos A$,

বা, $\cos^2 A+\sin^2 A+\sin^2 A=3 \sin A \cos A$,

বা, $\cos^2 A-3 \sin A \cos A+2 \sin^2 A=0$,

বা, $\cos^2 A-2 \sin A \cos A-\sin A \cos A+2 \sin^2 A=0$,

বা, $(\cos A-2 \sin A)(\cos A-\sin A)=0$,

$\therefore$ $\cos A-2 \sin A=0 \cdots(1)$ অথবা, $\cos A-\sin A=0 \cdots(2)$.

(1) হইতে পাই $\cos A=2 \sin A$,

বা, $\frac{1}{2}=\frac{\sin A}{\cos A}$ (উভয় পক্ষকে $2 \cos A$ দ্বারা ভাগ করিয়া), $\therefore \tan A=\frac{1}{2}$.

(2) হইতে পাই $\cos A=\sin A$, বা, $1=\frac{\sin A}{\cos A}=\tan A$.

$\therefore$ $\tan A=1$ বা $\frac{1}{2}$.

আবার, * $\because \cos A=\sin A$. $\therefore A=45°$ [কারণ, 45° কোণেরই সাইন ও কস্ সমান হয়] $\sin A=\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

[*অন্য প্রণালী : $\sin A=\cos A=\sin (90°-A)$.

$\therefore$ $A=90°-A$, বা, $2A=90°$, $\therefore$ $A=45°$.

$\therefore$ $\sin A=\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$]

Exercise 6

Solve the following :—

1. $3 \tan \theta=\cot \theta$
2. $4 \cos A=\sec A$.
3. $\tan A+\cot A=\frac{4}{\sqrt{3}}$
4. $\sin A+\cos A=1$.
5. $\sec \theta+\cos \theta=\frac{5}{2}$.
6. $2 \sin \theta=\operatorname{cosec} \theta$.
7. $\sin \theta+\operatorname{cosec} \theta=\frac{3}{\sqrt{2}}$
8. $\cot 5\theta=\tan 10\theta$.
9. $\sin 10\theta=\cos 8\theta$.
10. If $\tan A+\cot A-2=0$, find $\sin A$.

11. If $x \tan \theta = \sqrt{3}$ and $x \cot \theta = 3\sqrt{3}$, find x and θ, θ being an acute angle.

12. If $p \sin \theta = \sqrt{3}$ and $p \cos \theta = 1$, where θ is an acute angle, find p and θ.

13. If $x \sin 30^\circ \tan 60^\circ \cos 30^\circ = \sin^2 60^\circ - \sec^2 45^\circ$, find the value of x.

14. Given that $2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$, where θ is a positive acute angle, prove that $\cot \theta = \sqrt{3}$. [C. U. '51]

15. Solve $\dfrac{\sec \theta + \tan \theta}{\sec \theta - \tan \theta} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.

16. Solve $2 \sin^2\theta + 3 \cos \theta = 3$. [Pat. U. '50]

17. Solve $\sec A + \tan A = \sqrt{3}$.

ত্রিকোণমিতির ব্যবহারিক প্রয়োগ

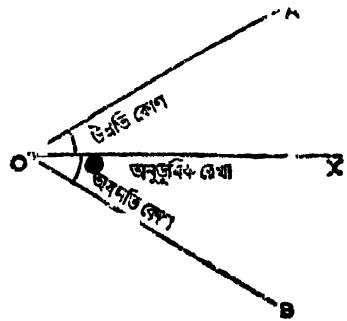
উচ্চতা ও দূরত্ব (Height and distance)

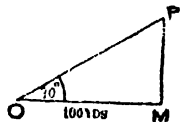
দুর্গম গিরিশৃঙ্গের উচ্চতা, দুস্তর বিশাল নদীর বিস্তার এবং চন্দ্র, সূর্য, নক্ষত্রাদির দূরত্ব প্রভৃতি নির্ণয় এই ত্রিকোণমিতির প্রয়োগ ও সাহায্যেই হইয়া থাকে।

90. উন্নতি কোণ (Angle of elevation) এবং অবনতি কোণ (Angle of depression) :

ভূমিতলের সমান্তরাল সরলরেখাকে অনুভূমিক (horizontal) সরল রেখা এবং উহার উপর লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখাকে **উল্লম্ব** বা লম্বরেখা (vertical line) বলে।

মনে কর, OX একটি অনুভূমিক সরলরেখা এবং ঐ রেখার উপরের দিকে A বিন্দু এবং নীচের দিকে B বিন্দু অবস্থিত। যদি কোন ব্যক্তি O বিন্দুতে তাহার চক্ষু নিবদ্ধ রাখিয়া A ও B বিন্দুর প্রতি দৃষ্টিপাত করে, তবে XOA কোণটিকে A বিন্দুর **উন্নতি কোণ** বা কৌণিক উন্নতি এবং XOB কোণটিকে B বিন্দুর **অবনতি কোণ** বা কৌণিক অবনতি বলে।

৯নং চিত্র

এখানে মনে রাখিবে যে, পর্যবেক্ষকের চক্ষুর অবস্থান-বিন্দুর ভিতর দিয়া অঙ্কিত বা কল্পিত অনুভূমিক রেখার উপর দিকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে উক্ত বিন্দুর কৌণিক উন্নতি বলে এবং ঐ রেখার নীচের দিকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে উক্ত বিন্দুর কৌণিক অবনতি বলে।

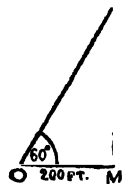
উদা. 1. মনে কর, PM একটি পাহাড় এবং উহার তলদেশ হইতে 100 গজ দূরে O বিন্দুতে ঐ পাহাড়ের চূড়া P বিন্দুর উন্নতি-কোণ 30,° ঐ পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় করিতে হইবে।

১০নং চিত্র

এখানে PM উচ্চতা, OM = 100 গজ এবং $\angle MOP = 30°$, অর্থাৎ POM সমকোণী ত্রিভুজটির ভূমি দেওয়া আছে, লম্ব নির্ণয় করিতে হইবে। অতএব, লম্ব ও ভূমির অনুপাত হইতে উহা নির্ণয় করা যাইবে।

$$\frac{PM}{OM} = \tan \angle POM = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \therefore \frac{PM}{100} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore \quad PM = \frac{100}{\sqrt{3}} \text{ গজ} = \frac{100 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \text{ গজ} = \frac{100\sqrt{3}}{3} \text{ গজ} = 57{\cdot}7 \text{ গজ}$$

উদা. 2. The angle of elevation of the top of a chimney at a distance of 200 ft. is 60°. Find the height of the chimney. [C. U. 1927]

মনে কর, ভূমির উপর লম্বভাবে দণ্ডায়মান চিমনির উচ্চতা PM এবং M বিন্দুর ভিতর দিয়া অঙ্কিত অনুভূমিক রেখার উপর 200 ফুট দূরে অবস্থিত O বিন্দু হইতে P বিন্দুর উন্নতি-কোণ $\angle POM = 60°$.

১১নং চিত্র

এক্ষণে, $\frac{PM}{OM} = \tan 60°$,

বা, $\frac{PM}{200} = \sqrt{3}$, $\therefore$ $PM = 200\sqrt{3}$ ফু. $= 346{\cdot}4$ ফুট।

উদা. 3. A tree on the bank of a river is 50 ft. high and the angle of elevation of the top of the tree from a point on the opposite bank is observed to be 30°. Find the breadth of the river.

(১১ নং চিত্র আঁক) মনে কর, নদীর এক তীরে অবস্থিত PM বৃক্ষটি 50 ফুট উচ্চ এবং উহার অপর তীরে বিপরীত দিকে অবস্থিত O বিন্দু হইতে P-র উন্নতি-কোণ $\angle POM = 30°$. নদীর বিস্তার OM নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে $\frac{PM}{OM} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, বা $\frac{50}{OM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\therefore$ $OM = 50\sqrt{3}$ ফুট।

উদা. 4. Find the length of the shadow of a pillar 60 ft. high on the horizontal plane through its foot, when the angle of elevation of the sun is 60°.

[১২নং চিত্র আঁক] মনে কর, PM একটি 60 ফুট উচ্চ স্তম্ভ, সূর্যের অবস্থান S বিন্দুতে এবং সূর্যের রশ্মি SP-র দিক হইতে আসিতেছে এবং ভূমির উপর PM-এর ছায়া OM হইয়াছে। O বিন্দু হইতে সূর্যের উন্নতি কোণ 60°.

এখানে $\frac{PM}{OM} = \tan 60°$, বা $\frac{60}{OM} = \sqrt{3}$, বা $OM\sqrt{3} = 60$, $\therefore$ $OM = \frac{60}{\sqrt{3}}$.

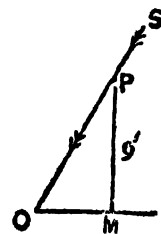
$\therefore$ ছায়ার দৈর্ঘ্য $= 20\sqrt{3}$ ফুট $= 34.64$ ফুট।

উদা. 5. Find the angle of elevation of the sun when the shadow of a pole 9 ft. high is $3\sqrt{3}$ ft. long. [C. U. '56]

১২নং চিত্র

মনে কর, PM খুঁটির উচ্চতা 9 ফুট, S সূর্যের অবস্থান এবং সূর্যরশ্মি PO-র দিকে আসিয়া ভূমির উপর PM-এর ছায়া OM উৎপন্ন করিয়াছে। $OM = 3\sqrt{3}$ ফুট। সূর্যের উন্নতি-কোণ বা $\angle POM$ নির্ণয় করিতে হইবে।

এক্ষণে, $\tan \angle POM = \frac{PM}{OM} = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$,

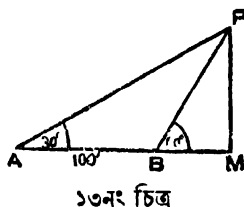
কিন্তু $\tan 60° = \sqrt{3}$ হয়। $\therefore$ $\angle POM = 60°$.

উদা. 6. A vertical chimney subtends angles of 30° and 60° at points A and B which lie in a horizontal line through the base of the chimney. Find its height if AB is 100 ft.

[C. U. '40]

মনে কর, চিমনির উচ্চতা PM, $\angle PAM = 30°$, $\angle PBM = 60°$ এবং $AB = 100$ ফুট।

১৩নং চিত্র

একণে, $\frac{AM}{PM} = \cot 30° = \sqrt{3} \cdots\cdots (1)$

এবং $\frac{BM}{PM} = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdots\cdots (2)$

$\therefore$ (1) − (2) করিয়া পাই $\frac{AM - BM}{PM} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3-1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{100}{PM} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, বা $2\,PM = 100\sqrt{3}$, $\therefore$ $PM = 50\sqrt{3}$ ফুট।

$\therefore$ চিমনির উচ্চতা $= 50\sqrt{3}$ ফুট. $= 86\cdot6$ ফুট।

. 7. The shadow of a chimney is found to diminish 50 ft. in length when the angles of elevation of the sun changes from 30° to 60°. Find the height of the chimney.

[C. U. '43]

[১৩নং চিত্র আঁক] মনে কর, PM চিমনির ছায়া AM এবং A বিন্দু হইতে সূর্যের উন্নতি-কোণ $\angle PAM = 30°$; আবার, মনে কর B বিন্দু হইতে সূর্যের উন্নতি-কোণ $\angle PBM = 60°$ এবং তখন PM চিমনির ছায়া BM, পূর্বচ্ছায়া AM অপেক্ষা 50 ফুট কম, অর্থাৎ $AB = 50$ ফুট। চিমনির উচ্চতা নির্ণয় করিতে হইবে।

একণে, $\frac{AM}{PM} = \cot 30° = \sqrt{3}$, এবং $\frac{BM}{PM} = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

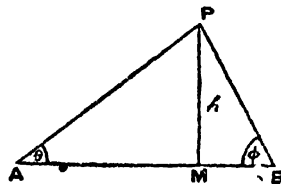
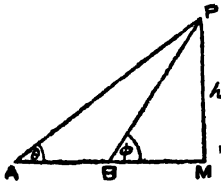
$\therefore$ (বিয়োগ করিয়া) $\frac{AM - BM}{PM} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}$, বা, $\frac{50}{PM} = \frac{3-1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

বা, $2\ PM = 50\sqrt{3}$, $\therefore\ PM = 25\sqrt{3}$,
অর্থাৎ চিমনির উচ্চতা $= 25\sqrt{3}$ ফুট।

উদা. 8. The angular elevations of the top of a tower from two points in the same horizontal line with its foot are observed to be θ and ϕ respectively. Find the distance between the two points of observation, if the height of the tower is h. [C. U. '42]

যে বিন্দুদ্বয় হইতে স্তম্ভশীর্ষের উন্নতি-কোণ দেখা যাইতেছে, তাহারা স্তম্ভের একই পার্শ্বে অথবা পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত থাকিতে পারে। মনে কর, PM স্তম্ভের উচ্চতা h এবং প্রথম চিত্রে উহার একই পার্শ্বস্থিত এবং দ্বিতীয় চিত্রে উহার দুই পার্শ্বস্থিত A ও B বিন্দু হইতে P-র উন্নতি-কোণ যথাক্রমে θ ও ϕ.

AB দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে। উভয় চিত্রে $\dfrac{AM}{PM} = \cot\theta \cdots\cdots(1)$

এবং $\dfrac{BM}{PM} = \cot\phi \cdots\cdots(2)$

১৪নং চিত্র

প্রথম পক্ষে (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই $\dfrac{AM - BM}{PM} = \cot\theta - \cot\phi$,

বা, $\dfrac{AB}{h} = \cot\theta - \cot\phi$, $\therefore\ AB = h(\cot\theta - \cot\phi)$. [উত্তর]

দ্বিতীয় পক্ষে (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই, $\dfrac{AM + BM}{PM} = \cot\theta + \cot\phi$,

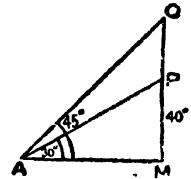
বা, $\dfrac{AB}{h} = \cot\theta + \cot\phi$, $\therefore\ AB = h(\cot\theta + \cot\phi)$. [উত্তর]

উদা. 9. A post stands on the top of a pillar 40 ft. high. The elevations of the tops of the pillar and the post are respectively 30° and 45° to an observer standing on the horizontal line from the foot of the pillar. Find the length of the post and the distance of the observer from the pillar.

মনে কর, PM স্তম্ভের উপর PQ খুঁটি অবস্থিত এবং A বিন্দু হইতে P ও Q বিন্দুর উন্নতি-কোণদ্বয় $\angle PAM = 30°$ এবং $\angle QAM = 45°$. $PM = 40$ ফুট। PQ ও AM নির্ণয় করিতে হইবে।

১৫নং চিত্র

এক্ষণে, $\frac{QM}{AM} = \tan 45° = 1$, $\therefore$ $QM = AM$.

আবার, $\frac{PM}{AM} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, বা, $\frac{40}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$\therefore$ $AM = 40\sqrt{3}$, $\therefore$ $PQ = QM - PM = AM - PM = 40\sqrt{3} - 40$
$= 40(\sqrt{3} - 1) = 40(1{\cdot}732 - 1) = 29{\cdot}28$ ফুট।

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= 40\sqrt{3}$ ফুট $= 69{\cdot}28$ ফুট, এবং খুঁটির দৈর্ঘ্য $= 29{\cdot}28$ ফুট।

উদা. 10. A man, standing on the bank of a river, observes that the angle subtended by a tower, just on the opposite bank is 60°, but when he retires 60 ft. from the bank he finds the angle to be 30°; find the height of the tower and the breadth of the river.

[১৩নং চিত্র আঁক] চিত্রে MP স্তম্ভের উচ্চতা ও BM নদীর প্রস্থ, অতএব, $\angle PBM = 60°$; লোকটি B বিন্দু হইতে সরিয়া 60ফুট পিছনে A বিন্দু হইতে দেখিল $\angle PAM = 30°$.

এক্ষণে, $\frac{AM}{PM} = \cot 30° = \sqrt{3}$, এবং $\frac{BM}{PM} = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

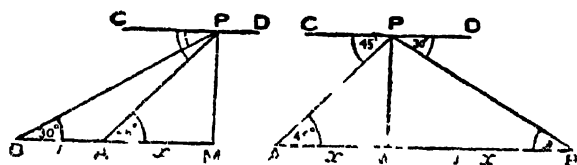
$\therefore$ (বিয়োগ করিয়া) $\frac{AM - BM}{PM} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, বা, $\frac{60}{PM} = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

$\therefore$ $PM = 30\sqrt{3}$, $\therefore$ স্তম্ভের উচ্চতা $= 30\sqrt{3}$ ফুট $= 30 \times 1{\cdot}732$ ফুট
$= 51{\cdot}96$ ফুট।

আবার, $\frac{BM}{PM}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\therefore$ $BM=\frac{1}{\sqrt{3}}\times PM=\frac{1}{\sqrt{3}}\times 30\sqrt{3}=30.$

অতএব, নদীর বিস্তার $=30$ ফুট।

উদা. 11. From an aeroplane vertically above a straight road the angles of depression of two consecutive mile-stones on the road are observed to be 45° and 30°. Find the height of the aeroplane above the road. [C. U. '41, G. U. '49]

মনে কর, উভয় চিত্রে A ও B দুইটি মাইল-পোস্ট এবং P বিন্দু এরোপ্লেনের

১৬নং চিত্র

অবস্থান, সুতরাং লম্ব PM উহার উচ্চতা। এখানে $\angle PAM=45°$, $\angle PBM=30°$, এবং $AB=1$ মাইল। মনে কর, $AM=x$ মাইল, সুতরাং প্রথম চিত্রে $BM=(1+x)$ মাইল এবং দ্বিতীয় চিত্রে $BM=(1-x)$ মাইল।

এক্ষণে, $\frac{PM}{AM}=\tan 45°=1$, বা, $\frac{PM}{x}=1$, $\therefore$ $PM=x.$

প্রথম চিত্রে, $\frac{PM}{BM}=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$, বা, $\frac{x}{1+x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, বা, $x\sqrt{3}=1+x$,

বা, $x\sqrt{3}-x=1$, বা, $x(\sqrt{3}-1)=1$,

$\therefore$ $x=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}=1{\cdot}37$ (আসন্ন)।

দ্বিতীয় চিত্রে, $\frac{PM}{BM}=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$, বা $\frac{x}{1-x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, বা $x\sqrt{3}=1-x$,

বা, $x\sqrt{3}+x=1$, বা, $x(\sqrt{3}+1)=1$,

$\therefore$ $x=\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}={\cdot}37$ (আসন্ন)।

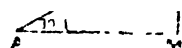
$\therefore$ এরোপ্লেনের উচ্চতা $=1{\cdot}37$ মাইল, বা ${\cdot}37$ মাইল।

উদা. 12. A vertical post 15 ft. high is broken at a certain height, and its upper part, not completely separated, meets the ground at an angle of 30°. Find the height at which the post is broken. [G. U. '51]

মনে কর, ভূমির উপর M বিন্দুতে অবস্থিত PM খুঁটিটি Q বিন্দুতে ভাঙ্গিয়াছে এবং উহার অগ্রভাগ নত হইয়া A বিন্দুতে ভূমির উপর পড়িয়াছে। সুতরাং AQ হইল PQ এর নূতন অবস্থান। অতএব, PQ = AQ এবং $\angle QAM = 30°$ হইল।

মনে কর, $QM = x$ ফুট,

সুতরাং $AQ = PQ = (15 - x)$ ফুট।

এক্ষণে, $\frac{QM}{AQ} = \sin 30° = \frac{1}{2}$, বা, $\frac{x}{15 - x} = \frac{1}{2}$.

বা, $2x = 15 - x$, বা, $3x = 15$, $\therefore x = 5$.

১৭নং চিত্র

অতএব, খুঁটিটি 5 ফুট উপরে ভাঙ্গিয়াছে।

উদা. 13. A long upright pole broke at a certain height, one end of the broken portion was tied to the top of the unbroken part, the other end lying on the ground at a distance of 20 ft. from the bottom of the pole. The angle of inclination of this transverse portion was measured and found to be 30°. How high was the pole originally? [E. B. S. B. '49]

[পূর্ব উদাহরণের চিত্রটি আঁক] মনে কর, ভূমির উপর M বিন্দুতে অবস্থিত PM খুঁটি Q বিন্দুতে ভাঙ্গিয়াছে এবং উহার অগ্রভাগ অর্থাৎ P বিন্দু ভূমির উপর A বিন্দুতে পড়িয়াছে। সুতরাং $AM = 20$ ফুট, $\angle QAM = 30°$, এবং $PM = AQ + QM$ হইল।

এক্ষণে, $\frac{QM}{AM} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, বা, $\frac{QM}{20} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, বা, $QM = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

আবার, $\frac{AM}{AQ} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

বা, $\frac{20}{AQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, বা, $AQ\sqrt{3} = 40$, বা, $AQ = \frac{40}{\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$ খুঁটির দৈর্ঘ্য $= AQ + QM = \left(\frac{40\sqrt{3}}{3} + \frac{20\sqrt{3}}{3}\right)$ ফুট $= \frac{60\sqrt{3}}{3}$ ফুট

$= 20\sqrt{3}$ ফুট $= 20 \times 1.732$ ফুট $= 34.64$ ফুট।

উদা. 14. From the top of a cliff 150 ft. high the angles of depression of the top and bottom of a pillar are found to be 30° and 60° respectively, find the height of the pillar.

মনে কর, PM পাহাড়টি 150 ফুট এবং AB স্তম্ভটি x ফুট উচ্চ। PC ‖ MA টানা হইল, সুতরাং $\angle CPB = 30°$ ও $\angle CPA = 60°$ হইল। ABর বর্ধিত অংশ যেন PCকে C বিন্দুতে ছেদ করিল, সুতরাং $BC = AC - AB = PM - AB = 150 - x$.

এক্ষণে, $\angle PAM = \angle APC = 60°$,

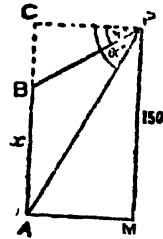
$\therefore \frac{AM}{PM} = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

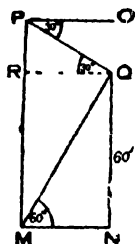
$\therefore AM = \frac{PM}{\sqrt{3}} = \frac{150}{\sqrt{3}} = \frac{150\sqrt{3}}{3} = 50\sqrt{3}$.

১৮নং চিত্র

আবার, $\frac{BC}{AM} = \frac{BC}{PC} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

বা, $\frac{150 - x}{50\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [$\because AM = 50\sqrt{3}$], বা, $150 - x = 50$,

$\therefore x = 100$. $\therefore$ স্তম্ভের উচ্চতা $= 100$ ফুট।

উদা. 15. From the top and bottom of a cliff the angles of depression and elevation of the top of a pillar 60 ft. high are observed to be 30° and 60° respectively. Find the height of the cliff.

মনে কর, চিত্রে PM পাহাড়ের উচ্চতা h, QN স্তম্ভের উচ্চতা 60 ফুট এবং P বিন্দু হইতে Q বিন্দুর অবনতি-কোণ 30° ও M বিন্দু হইতে Q বিন্দুর উন্নতি-কোণ 60°. PO অনুভূমিক রেখা এবং QR⊥PM টানা হইল। এখন ∠OPQ=30° এবং ∠QMN=60° হইল। ∵ OP, QR ও NM একই সরল রেখা PM-এর উপর লম্ব, ∴ উহারা পরস্পর সমান্তরাল, সুতরাং ∠PQR=30° এবং ∠RQM=60°. এক্ষণে, RM=QN=60′.

১৯নং চিত্র

$$\frac{QN}{MN}=\tan 60°=\sqrt{3}, \text{ বা, } \frac{60}{MN}=\sqrt{3},$$

$$\therefore \quad MN=\frac{60}{\sqrt{3}}=\frac{60\sqrt{3}}{3}=20\sqrt{3}. \text{ আবার, } \frac{PR}{RQ}=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\text{বা, } \frac{PR}{MN}=\frac{1}{\sqrt{3}} [\because RQ=MN], \therefore PR=\frac{MN}{\sqrt{3}}=\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=20.$$

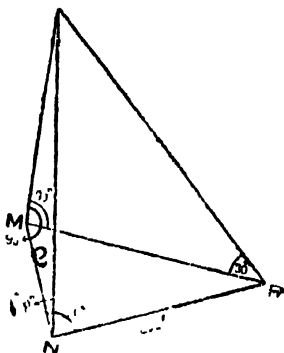
∴ PM=PR+RM=20′+60′=80′. ∴ পাহাড়ের উচ্চতা 80 ফুট।

উদা. 16. A man finds that at a point due south of a tower the angle of elevation of its top is 60°, he then walks 200 ft. due east on a horizontal plane and finds that the angle of elevation is 30° ; find the height of the tower.

চিত্রে PM স্তম্ভের ঠিক দক্ষিণে N বিন্দু হইতে স্তম্ভশীর্ষের উন্নতিকোণ 60°, লোকটি N বিন্দু হইতে ঠিক পূর্বদিকে 200′ গিয়া R বিন্দু হইতে দেখিল উন্নতিকোণ 30°, সুতরাং এখানে ∠MNP=60°, ∠MRP=30°, ∠MNR=90°, ∠PMR=90°, ∠PMN=90°. এক্ষণে PMN ত্রিভুজের ভূমি MN এবং PM লম্ব, $\therefore \frac{PM}{MN}=\tan 60°=\sqrt{3}$,

$$\therefore \quad MN=\frac{PM}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{আবার, } \frac{PM}{MR}=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore \quad MR=PM\sqrt{3}.$$

২০নং চিত্র

আবার, $\angle MNR$ সমকোণ বলিয়া $MR^2 = MN^2 + NR^2$,

বা, $(PM\sqrt{3})^2 = \left(\frac{PM}{\sqrt{3}}\right)^2 + 200^2$, বা $3PM^2 = \frac{PM^2}{3} + 200^2$

বা, $8PM^2 = 3 \times 200^2$, বা, $PM^2 = \frac{3 \times 200^2}{8}$.

$\therefore \quad PM = \frac{\sqrt{3} \times 200}{2\sqrt{2}} = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{100\sqrt{6}}{2} = 50\sqrt{6}$

$= 50 \times 2{\cdot}44949\cdots = 122{\cdot}47\cdots$

$\therefore$ স্তম্ভের উচ্চতা $= 122{\cdot}47$ ফুট (আসন্ন)।

উদা. 17. From the top of a tree 20 ft. high the angles of elevation and depression of the top and base of a temple situated on the same horizontal plane are observed to be 45° and 30° respectively. Find the height of the temple.

[U. U '51]

[Hints : (চিত্র নং ১৯ দেখ] মনে কর QN বৃক্ষ 20 ফুট, PM মন্দির এবং Q হইতে P-এর উন্নতি-কোণ $\angle PQR = 45°$ ও M-এর অবনতি-কোণ $\angle RQM = 30°$. এক্ষণে, $\frac{QN}{MN} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, বা $\frac{20}{MN} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$\therefore \quad MN = 20\sqrt{3}$. $\therefore$ $RQ = MN = 20\sqrt{3}$,

$\therefore \quad PR = MN = 20\sqrt{3}$ (কারণ, $\angle PQR = 45° = \angle RPQ$),

$\therefore \quad PM = MR + PR = (20 + 20\sqrt{3})$ ফুট $= (20 + 34{\cdot}64)$ ফুট

$= 54{\cdot}64$ ফুট (প্রায়)]

Exercise 7

1. A tower subtends an angle of 30° at a distance of 300 ft. from its foot ; find its height.

2. The angle of elevation of the top of a monument at a distance of 150 yds. is 60°. Find the height of the monument.

3. The angle of elevation of the top of a chimney 60 ft. high seen from a distance in the same horizontal plane is 30°, find the distance.

4. Find the length of the shadow of a vertical stick 6 ft high on the horizontal plane through its foot, when the sun is at an altitude of 30°. [G. U. '50]

5. The shadow of a pole is $3\sqrt{3}$ ft. long when the angle of elevation of the sun is 60°. Find the height of the pole.

6. A ladder 30 ft. long reaches the top of a wall and makes an angle of 45° with the ground ; find the height of the wall.

7. What is the angle of elevation of the sun when the shadow of a post 24 ft. high is $24\sqrt{3}$ ft. long ?

8. Find the height of a chimney when it is found that on walking towards it 50 ft. in a horizontal line through its base the angular elevation changes from 30° to 45°.
[C. U. '51]

9. The angle of elevation of the top of a pillar is 30°, and on approaching 20 ft. nearer it is 60°. Find the height of the pillar. [G. U. '48]

10. The tree on the bank of a river is 45 ft. high and the angle of elevation of the top of the tree from a point just on the opposite bank is found to be 60°. Find the breadth of the river.

11. In advancing 60 ft. towards a tower, the altitude of its top is changed from 45° to 60° Find the height of the tower. [E. B. S. B. '48]

12. The shadow of a tower standing on a level plane is found to be 40 ft. longer when the sun's altitude is 45° than when it is 60°. Find the height of the tower.
[C. U. '50 , D. B. '51]

13. The horizontal distance between two pillars is 60 ft. and the angular depression of the top of the first as seen from the top of the second, which is 200 ft. high, is 30°, find the height of the first.

14. A vertical post 120 feet high is broken at a certain height, and its upper part, not completely separated, meets the ground at an angle of 30°. Find the height at which the post is broken. [C. U. '50]

15. The upper part of a tree, broken at a certain height, makes an angle of 60° with the ground at a distance of 10 feet from its root. Find the original height of the tree.

16. The angles of elevation of the top of a monument is 30° and 60° respectively when observed from two points P and Q lying on a horizontal line through the foot of the monument and on the same side of it. If PQ = 80 ft., find the height of the monument. [C. U. '45 ; G. U. '52 ; E.B.S.B.'50]

17. The angle of elevation of the top of an unfinished pillar at a point 150 ft. from its base is 30°, how much higher must the pillar be raised so that its angle of elevation at the same point may be 45° ?

18. Find the angle of elevation of the sun when the length of the shadow of a post is to its height as $\sqrt{3} : 1$.

19. A man, standing on the bank of a river, finds that the angle subtended by a post just on the opposite bank is 60°, but when he retires 60 ft. from the bank he finds the angle to be 30°. Find the height of the post and the breadth of the river.

20. From a cliff 300 ft. high the angles of depression of the top and foot of a tower are observed to be 30° and 60° respectively. Find the height of the tower.

21. From an aeroplane vertically above a straight road the angles of depression of two consecutive mile-stones are observed to be 30° and 60° respectivaly. Find the height of the aeroplane above the road.

22. A man stands at a point A on the bank AB of a straight river, and observes that the line joining A to a point C on the opposite bank makes with AB an angle of 30°. He then goes 200 yards along the bank to B and finds that BC makes an angle of 60° with AB. Find the breadth of the river. [C. U. '44]

23. Two posts of the same height stand on either side of a road which is 40 ft. wide. At a point on the road between the posts the elevations of their tops are 60° and 30°. Find their height and the position of the point.

24. From a point due east the angle of elevation of the top of a tower is 60° and from another point due north it is observed to be 45°. If the distance between the two points is 200 yds., find the height of the tower.

25. The shadow of a tower standing on a level plane is 60 ft. longer when the altitude of the sun is 30° than when it is 45°. Find the height of the tower. [W. B. S. F. '52]

26. From the top of a tree the angle of depression of an object on the horizontal ground is found to be 60°. On descending 20 ft. from the top of the tree the angle of depression of the object is found to be 30°. Find the height of the tree. [U. U. '52]

উত্তরমালা

বীজগণিত

Exercise 1

1. (i) $-32a^{15}b^{10}$ (ii) $729x^{12}y^{18}$ (iii) $-\dfrac{a^5b^{10}}{32x^{10}y^5}$

   (iv) $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

2. $a^6+6a^5+15a^4+20a^3+15a^2+6a+1$.

3. $x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6+y^7$.

4. $1+8a+24a^2+32a^3+16a^4$.

5. $a^5-10a^4+40a^3-80a^2+80a-32$.

6. $x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$.

7. $x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$.

8. $32a^5-80a^4+80a^3-40a^2+10a-1$.

9. $729-1458c+1215c^2-540c^3+135c^4-18c^5+c^6$.

10. $32a^5+80a^4b+80a^3b^2+40a^2b^3+10ab^4+b^5$.

11. $32x^5-240x^4y+720x^3y^2-1080x^2y^3+810xy^4-243y^5$.

12. $243a^5+810a^4b+1080a^3b^2+720a^2b^3+240ab^4+32b^5$.

13. $a^8+8a^7+28a^6+56a^5+70a^4+56a^3+28a^2+8a+1$.

14. $x^9-9x^8+36x^7-84x^6+126x^5-126x^4+84x^3-36x^2$
$+9x-1$.

15. $a^{12}+6a^{10}+15a^8+20a^6+15a^4+6a^2+1$.

16. $x^{10}+5x^8+10x^6+10x^4+5x^2+1$.

17. $a^8-4a^6b^2+6a^4b^4-4a^2b^6+b^8$.

18. $1-6a^2+15a^4-20a^6+15a^8-6a^{10}+a^{12}$.

19. $x^3-y^3+z^3-3x^2y+3xy^2+3x^2z+3xz^2-3yz^2+3y^2z-6xyz$.

20. $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4-8a^3-24a^2b-24ab^2-8b^3+$
$24a^2+48ab+24b^2-32a-32b+16$.

21. 64. **22.** 32. **23.** 128. **24.** 256. **24.** (*a*). −1

25. 32. **26.** 242. **27.** 0. **28.** 0.

29. 243. **30.** 1. **31.** 8.

32. $10x^4y+20x^2y^3+2y^5$. **33.** $12x+40x^3+12x^5$

34. $2a^7+42a^5b^2+70a^3b^4+14ab^6$.

35. $12x^5a+40x^3a^3+12xa^5$.

Exercise 2

1. $(m^2+mn+n^2)(m^2-mn+n^2)$

2. $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$. **3.** $(2x+z)(2x-2y-z)$

4. $(a+b-c-d)(a-b+c-d)$ **5.** $(2x^2+6x+9)(2x^2-6x+9)$

6. $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$. **7.** $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$

8. $(x^2+2x-2)(x^2-2x-2)$.

9. $(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

10. $(x+3)(x^2-3x+9)(x-3)(x^2+3x+9)$.

11. $(x+y-4a)(x-y-2a)$. **12.** $(3x+11)(4x+7)$

13. $(3x+7y)(7x-3y)$. **14.** $(2a^2+5)(2a+3)(2a-3)$

15. $(a^2+2a-4)(a^4-2a^3+8a^2+8a+16)$.

16. $(a+b-2c)(a^2+b^2+4c^2-ab+2ac+2bc)$.

17. $(a-1)(a^2-a-4)$. **18.** $(x+2)(x-1)(x+15)$

19. $(x+2)(x+3)(x+4)$. **20.** $(x+1)(x-5)(x-2)^2$.

21. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$. **22.** $(c+d+a-b)(c+d-a+b)$

23. $(5a-3b)(15b-13a)$. **24.** $(x-1)(x+1)(x-3)$.

25. $(a-5)(a+2)(a^2-3a+12)$.

26. $(x^2-3x-5)(x^2-3x-17)$. **27.** $(x+y)(y+z)(z+x)$.

28. $(x-y+z)(x^2+y^2+z^2+xy-xz+yz)$.

29. $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

30. $-(a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$.

31. $(a+b)(b+c)(c+a)$. **32.** $3(2x-3y)(3y-z)(z-2x)$

33. $(x^2+5x+3)(x^2+5x+7)$. **34.** $(x+a+3)(x-a-1)$.

35. $(x-3)(2x+3)(2x^2-3x+7)$. **36.** $3(a+b)(b-c)(a+2b-c)$.

37. $(a+d+b+c)(a+d-b-c)(b-c+a-d)(b-c-a+d)$.

38. $2(a+c)(1+a)(1-c)$. **39.** (i) $(x+5)(5x+1)(5x^2+14x+20)$

(ii) $(a^2+3a-2)(a^2+3a-3)$.

40. $(x^3+1)(x^2+x+1)$. 41. $(x-b)(x-c)(b-c)$.

42. $(x^2+2x+5)(x^4-2x^3-x^2-10x+25)$.

43. $(3a-2b+c)(2a+b+3c)$.

44. $(a^2-ab+b^2)(a^2-4ab+b^2)$.

45. $(a^2b^2+ab-c+1)(a^2b^2-ab+c+1)$

46. $(x+1)(x^2-3x+1)(x^2+6x+1)$.

47. $-(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$

48. $5(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

Exercise 3

1. (i) 20 (ii) -4 (iii) -90 (iv) $2n^3-3n^2+5n+6$.

2. (i) 40 (ii) -31 (iii) -44 (iv) 688 (v) $-3\frac{1}{4}$.

6. 3 7. 174 9. 5 15. $x^7+x^6y+x^5y^2+\cdots+y^7$.

16. যদি $p+q+r+\ldots\ldots+l+m=0$ হয়

17. $(p-p')(p'q-pq')=(q-q')^2$.

20. ap^3+bp^2+cp+d. 21. $m=2kn$ (k একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা) ;

Exercise 4

প্রথমটি x এর, দ্বিতীয়টি y এর এবং তৃতীয়টি z এর মান দেওয়া হইল।

1. 13, 6 ; 2. 5, 2 ; 3. 6, 2 ; 4. -3, 3, 1 ; 5. (a) 4, 10 ;
5. (b) 1, 2 ; 6. 3, 1 , 7. 0, 2, 4 ; 8. 5, 1 ; 9. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{7}$;
10. $\frac{1}{4}$ -4 , 11. 3, 2 ; 12. 3, 3, 3 ; 13. 1, 3, 5 ; 14. 20, 15, 12 ;
15. $\pm4, \pm6, \pm7$; 16. $\frac{1}{2a}, \frac{1}{8a}, \frac{1}{4a}$ 16. (a) 2, -1, 3 ;
17. 1, 1, 1 ; 18. a, b, c : 19. $bc(b-c), ca(c-a), ab(a-b)$;
20. 4, 3, 5 ; 21. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$; 22. $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$;
23. $bc+ab-ca, ab+ca-bc, ca+bc-ab$; 24. $\pm1, \pm2, \pm3$;
25. $\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}$, 26. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$; 27. $\frac{ac-b-bc}{a^2-b^2}, \frac{a+ac-bc}{a^2-b^2}$;
28. $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ 29. 1, 2, 3 ; 30. 4, 5, 6 ; 31. 12, 12, 12 ;
32. 10, 20, 5 ; 33. -2, 2, 1 ;
34. $\frac{2}{a+b-c}, \frac{2}{a-b+c}, \frac{2}{b+c-a}$;
35. $pq+pm+qm, pqm, p+q+m$.

Exercise 5

1. পিতার 38 ব., পুত্রের 14 ব. ; 2. 35, 45, ; 3. 69 ; 4. 1215, 15 ; 5. $\frac{15}{28}$; 6. 93 ; 7. 72 , 8. 54 ; 9. 5টা $32\frac{4}{13}$ মি. ; 10. 84 পে. ; 11. ঘণ্টায় 2 মা. , 12. 2 : 3 ; 13. 21 তোলা ; 14. 10 ঘণ্টা ; 15. 28 ; 16. ঘণ্টায় 2 মা. ও 4 মা. ; 17. নৌকা ঘণ্টায় 4 মা., স্রোত ঘণ্টায় 1 মা. ; 18. 84 ; 19. 1800 খৃষ্টাব্দ , 20. $\frac{3}{4}$ পে., 512 ; 21. চা 2শি., কফি $1\frac{1}{2}$ শি. ; 22. 123 ; 23. 180 মাইল ; 24. $\frac{4}{13}$; 25. 153 লেবু, 192 আপেল ; 26. 210 মা. ; 27. 709 ; 28. 27 ই. ; 30. $\frac{2}{5}$; 31. 300 টা., 180 টা. , 32. 21 মা., ঘণ্টায় 3 মা. , 33. 500 টা ; 34. 24, 5 ; 35. 45 মিনিট ; 36 ঘণ্টায় 20 মা., 10 মা. ; 37. 4 মি., 5 মি. ।

Exercise 6

1. 9 2. $\frac{1}{27}$ 3 243 4. 16 $\frac{1}{9}$ 6. 125

7. $\frac{y^{\frac{1}{4}}}{x}$ 8. x 9. $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{5}{3}}$ 10. 1. 11. $\left(\frac{a}{b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

12. -17 13. $a^{-\frac{17}{6}}b^{-\frac{31}{12}}$ 14. $a^{-2}b$ 15. $a^{\frac{82}{15x}}$ 16. $\sqrt[8]{}$

17. $\frac{y^5}{x^{18}}$ 17. (a) $\sqrt[4]{8}/2$ 18. (i) $x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{4}}-1+2x^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{4}}$

and $1-y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y^{-1}+x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-yx^{-\frac{1}{2}}$

18. (ii) $a+2b^{\frac{1}{2}}+3c^{\frac{1}{3}}$ 19. $x^{2n}-y^{-2n}$ 20. $a^{-3m}+b^{3n}$

21. $x^{2\cdot 3^{n-1}}+x^{3^{n-1}}y^{3^{n-1}}+y^{2\cdot 3^{n-1}}$

22. $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$, অথবা $\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$

23. $(x^m+y^n)(x^m-y^n)$ 24. x^a 25. $(a^4-b^4)^m$

26. a^{n^2-1} 27. x^{2abc} 28. $(x)^{-b^2}$ 29. $\frac{1}{x^{p^2+q^2}}$.

30. 1 31. 27 32. 1 33. 1

34. $\left(\frac{p}{q}\right)^{m+n}$ **35.** 1 **36.** 1 **37.** $\frac{2}{3}$ **38.** $\frac{e^x-1}{e^x+1}$

39. 1 **40.** 1 **41.** $\left(\frac{a}{b}\right)^{mn}$ **42.** $\frac{x^2}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$

42. (*a*). 1 **43** 1 **54** $p=(q)^{\frac{2}{2q-1}}$

Exercise 7

1. $\sqrt[12]{3^4}, \sqrt[12]{5^7}$ **2** (i) $\sqrt{4}, \sqrt{\frac{9}{4}}, \sqrt{x^4}$ (iii) $\sqrt[3]{b}$ $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}, \sqrt[3]{x^6}$

3 $\sqrt[8]{5}$ (i) $\sqrt{5}, \sqrt[4]{12}, \sqrt[3]{4}$ (ii) সাধারণই আছে

(iii) $\sqrt[3]{8}, \sqrt[4]{9}, \sqrt[6]{25}$ **5.** $\sqrt{20}, \sqrt[3]{54}, \sqrt[4]{x^4y}$ **6.** (i) $5\sqrt{7}$

(ii) $8\sqrt{7}$ (iii) $40\sqrt{3}$ (iv) $5\sqrt[3]{3}$ (v) $2\sqrt[3]{3}$

9. (i) 3 (ii) $12\sqrt{5}$ (iii) 16 (iv) $6\sqrt[6]{1944}$

10. (i) $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ (ii) $2\sqrt[3]{2}$ (iii) $\frac{1}{4}\sqrt[4]{20}$ **11.** (i) 1·06

(ii) 2·31 (iii) 6·71 (iv) 3·1 (v) 5·83

12. (i) -1 (ii) $3+\sqrt{6}+\sqrt{14}+\sqrt{21}$

(iii) $24+8\sqrt{6}+2\sqrt{15}+3\sqrt{10}$ (iv) $6\sqrt{15}-12\sqrt{2}-15+2\sqrt{30}$

(v) $2x-y$ (vi) $\sqrt{a^2+ab}-b\sqrt{a+b}-a+b^2$ (vii) $4+6\sqrt{2}$

(viii) $x\sqrt{x}+\sqrt{xy}-xy$ $y\sqrt{y}$ **13.** (i) $5-2\sqrt{6}$

(ii) $7-4\sqrt{3}$ (iii) $14+4\sqrt{6}$ (iv) $2x-2\sqrt{x^2-y^2}$

(v) $b^2-2a\sqrt{b^2-a^2}$ (vi) $4x+2\sqrt{4x^2-25}$ **14.** (*a*). $2+\sqrt{3}$

(*b*) $2\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}-2$ (*c*) $\frac{6\sqrt{10}+2\sqrt{5}+3\sqrt{2}+1}{19}$

(*d*) $5+2\sqrt{6}$

15. $\sqrt{3}$ **16.** 1·691 **17.** $2x$ **18.** $4x\sqrt{x^2-1}$

19. $\sqrt{2}$ **20.** $\frac{(7+\sqrt{5})}{11}$ **21.** $\sqrt{a+x}$ **22.** x

23. $\frac{4}{5}$ **24.** $\frac{1}{2}(3\sqrt{3}+1)$ **27.** 0 **28.** 0.

Exercise 8

[এখানে কেবল ধনাত্মক বর্গমূল দেওয়া হইল। তোমরা উভয় বর্গমূলই দেখাইবে। যথা, $\pm(a+b)$, $\pm(x^2-2xy+7y^2)$, $\pm(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ ইত্যাদি।]

1. $a+b$ 2. $x^2-2xy+7y^2$ 3. x^3+3x^2-4x+2

4. $x^2-ax+2a^2$ 5. $a^{-2}+a^{-1}b^{-1}-b^{-2}$ 6. $2x^{\frac{3}{4}}-3+4x^{-\frac{3}{4}}$

7. $7x^2-5xy+6y^2$ 8. $x^2-\frac{x}{2}-1$

9. x^2-3x+a 10. $1+a+\frac{a^2}{2}$ 11. $x-3-\frac{2}{x}$

12. $\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}$ 13. $2a^2+1+3a^{-2}$ 14. $x^2-x+\frac{1}{4}$

15. $x^2-1+\frac{1}{x^2}$ 16. $x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+1$ 17. $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{a}{3}$

18. $x^2+3x+1+\frac{1}{x}$ 19. $x^2+3x+\frac{1}{x}$ 20. $x^2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$

21. $\frac{x}{y}-\frac{1}{2}-\frac{y}{x}$ 22. $2x^{\frac{3}{2}}-1+x^{-\frac{3}{2}}$ 23. $x-\frac{1}{x}+1$

24. $a+\frac{1}{a}-1$ 25. $2a^2+3a+\frac{3}{a}$ 26. $2x^2-3xy+4y^2$

27. x^2-ax+b^2 28. $x^3-2x+\frac{1}{x^3}$ 29. $3x+x^{\frac{1}{3}}-2x^{\ \frac{1}{3}}$

30. $x^2+7x+11$ 31. $3x^2+7x-6$ 32. $x^2+\frac{1}{x^2}-2$

33. $x^2-11x+19$ 34. $\sqrt{2}(x^2+xy+y^2)$ 35. $\frac{2x}{x^2-1}$

36. $3-\sqrt{5}$ 37. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 38. $\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$

39. $2\sqrt{7}-\sqrt{5}$ 40. $a-\sqrt{ax-a^2}$ 41. $\sqrt[4]{3}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

42. $\sqrt[4]{7}\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ 43. $\sqrt{x+3y}+\sqrt{x-3y}$ 44. $2\sqrt{3x}-\sqrt{2y}$

46. $x=10$ 47. $x=3$ 48. $c=2$ 49. -41

50. $a+2$ 51. 10 52. $-a+1$ 53. 1

54. $p^2=4q$ 55. $n^2=4mp$ 58. $1+\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{8}$ 59. $a=\pm 2$

60. $\frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}+1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}$.

Exercise 9

1. $5a^3b^4$ 2. $-9x^2y^{-1}$ 3. $-\frac{6a^5}{7b^6}$ 4. $2x+y$ 5. $a-1$

6. $1+a+a^2$ 7. $2ax-3by$ 8. $\frac{2}{x^2}-3x$ 9. $\frac{a}{2}+1$ 10. 85

11. $4x^2-5y^2$ 12. $2a+b+c$ 13 $2a^2+a-3$ 14. $\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b$

15. $\frac{a}{b}-1-\frac{b}{a}$ 16. $x-4+\frac{2}{x}$ 17. 2.

Exercise 10

1 ±5 2 ±1 3. $\pm\sqrt{2}$ 4. ±2

5. $\frac{4}{3}, -\frac{5}{14}$ 6 $3, \frac{1}{3}$ 7. $14, 2\frac{1}{4}$ 8. $\frac{5}{2}, -\frac{2}{3}$

9. $7, -4\frac{9}{17}$ 10 $9\frac{15}{17}, -11$ 11. $5\frac{3}{8}, 9\frac{1}{2}$ 12. 3, 23

13. $2, -\frac{9}{8}$ 14. $12, \frac{3}{4}$ 15 $3\pm\sqrt{7}$ 16. $-3, 2$

17. $\sqrt{13}\pm3$ 18 6, 9 19 $4, -2\frac{1}{4}$ 20. $3, -4$

21. $5\pm\sqrt{17}$ 22. $3, \frac{68}{9}$ 23. $9, \frac{15}{13}$ 24. $6, \frac{1}{6}$

25. $-4, 2$ 26. $5, \frac{6}{5}$ 27. $0, -7$ 28. $0, 2\frac{1}{4}$

29. $-2a, -3a$ 30. $\frac{3\pm\sqrt{10}}{2}$ 31 $\frac{2}{7}$ 32. 8 (অবান্তর বীজ $\frac{1}{3}$)

33. $\sqrt{3}\pm4$ 34 64, 27 35. 3 36. $\frac{a(m-1)^2}{2m-1}$

37. 0, 1 38. $1, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ 39. 5 40. 1

41. 4 42. 2, 1 43. 2, 3 44. $-2, -2$

45. ±2 46. 7 47. $\frac{1}{2}$ 48. 2, 3

49. $c, c-2b$ 50. ±6 51. $x=1, y=\frac{1}{2}$ 52. 2, 1

53. 6 54 25 55. $-\frac{37}{26}$ 56. 5

57. $\frac{ab}{a+b}$ 58. $\frac{3\pm\sqrt{61}}{2}$ 59. (i) 25, (ii) $x=5, y=3$

60. $1, -2$ 61 $0, a+b$ 62. $\frac{1}{2}$ 63. $2, -1$ 64. 0, [illegible]

65. $\frac{b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$ 66. $-a, -b$ 67. $\pm\sqrt{\frac{5}{3}}, \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$

68. $\frac{2}{3}, -4$ 69. $x=3, y=3$ 70. $\pm\frac{2p}{\sqrt{5}}$

71. $-\frac{2}{3}(1 \pm \sqrt{7})$ **72.** 43, -42 **73.** $2\frac{3}{7}$, $-1\frac{4}{9}$

74. 1, $\frac{1}{a}$ **75.** 1·85, -1·12.

Exercise 11

1. 4 বা -1 বা -4 **2.** $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$ **3.** 5, 7, বা -7, -5

4. 10, 11 বা -11, -10 **5.** 7 বা -6 **6.** 11, 13, বা -13, -11

7. 121, 100 (২য় পক্ষে বর্গমূল -10 ধরিতে হইবে) **8.** 6, 8, বা -8, -6

9. 8″, 15″ **10.** 5″, 12″ **11.** A 2 ঘ., B 3 ঘ.

12. 9 পে. **13.** 20 **14.** 76

15. ঘণ্টায় 6 মা. **16.** 8″ **17.** 20′, 13′

18. ঘণ্টায় 4 মা. **19.** 19, 20 **20.** 7″ **21.** 8 মি., 12 মি. **22.** 324.

Exercise 12

1. (*a*) $x=3, y=1$ (*b*) $x=5, y=1$ (*c*) $x=-1$ (*d*) $x=1$ (*e*) $x=7$

21. (5, 12), (12, 5) **22.** (1, 1) **23.** (0, 0), (4, 4)

25. $(-2, 1)$, (4, 4) **26.** 1·4 **27.** (3, 4), (4, 3)

28. 2·3 **29.** (5, 2) **30.** 1 **31.** -1, 2

32. 1, 1·5 **34.** 3, -1 **35.** 6·7একক (প্রায়) **36.** 1, 3

37. 2·4, $-$·4 **38.** 7·5 একক **39.** 1 **40.** 3, ·5

41. -1, -2 **43.** 2, 4 **44.** (0, 0), (1, 1) **45.** 4, -1

46. (i) 2 ; (ii) -1 ; (iii) ·4, -2·4 **52.** $(-3, 4)$ **53** 5, $-\frac{1}{2}$

55. $10\frac{1}{2}$ আনা, 14টি ; **56.** অপরাহ্ণ 5 টায়, 35 মা. দূরে.

57. (1) P যাত্রা করার 50 মিনিট পরে, হাওড়া হইতে 25 মা. দূরে.
(2) 6 মাইল। **58.** A যাত্রা করার 4 ঘ. 12 মি. পরে, যাত্রাস্থল হইতে 13·2 মা. দূরে ; **59.** 9 টা বাজিয়া 9 মিনিটে, হাওড়া হইতে 26 মা. দূরে ; **60.** 80 মাইল ; **61.** 2·4 ঘণ্টা. **62.** (*a*). 5 টা 24 মিনিটে, P হইতে 24 মাইল দূরে (*b*) 4 মাইল **63.** (i) 80 টাকা, (ii) মাসিক 240 টাকা ; **64.** 24,500 জন ; **65.** 3·4 কি.গ্রা., 15·4 পাউণ্ড

67. $x=4, y=5$, অথবা, $x=-1\text{·}6, y=-6\text{·}2$

68. 4, -8 **69.** $x=12, y=2$; $x=-4, y=-6$.

70. $x=3, y=8$; $x=8, y=3$; $x=-3, y=-8$; $x=-8, y=-3$

71. $(\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$.

ত্রিকোণমিতি

Exercise 1

1. (i) $3^\circ\,40'\,14''$ (ii) $8^\circ\,27'\,30''$ (iii) $21^\circ\,36'$

2. $4^g\,62^{`}\,35^{``}$ (ii) $7^g3^{`}33{\cdot}\dot{3}^{``}$ (iii) $10^g\,72^{`}\,5^{`}$ (iv) $3^g\,24^{`}\,60^{``}$

3. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{27}{40}$ (iii) 1·35 (iv) $4\frac{13}{375}$ (v) ·503524 (vi) $\frac{2}{3}$ (vii) 20

4. (i) $33^g\,56^{`}\,66{\cdot}\dot{6}^{``}$ (ii) $70^g\,27^{`}\,50^{``}$ (iii) $66^g79^{`}\,16{\cdot}\dot{6}^{``}$ (iv) 120^g
(v) $16^g\,66^{`}\,66{\cdot}\dot{6}^{`}$

5. (i) $36^\circ\,19'\,1{\cdot}776''$ (ii) $54^\circ 8{\cdot}1''$ iii) $36^\circ\,24'\,29{\cdot}664''$
(iv) $114^\circ\,32'\,43{\cdot}\dot{6}\dot{3}$ v) 100° (vi) 120°

6. (i) $\frac{\pi}{6}$ (ii) $\frac{151\pi}{360}$ (iii) $\frac{3407\pi}{13500}$ (iv) $\frac{3}{5}\pi$ (v) $\frac{44}{125}\pi$
(vi) $1{\cdot}626286\pi$ **7.** $35^\circ, 19^\circ$; $\frac{350}{9}g, \frac{190}{9}g$

8. $110{\cdot}5^\circ$, $29{\cdot}5^\circ$, $\frac{221\pi^\circ}{360}$, $\frac{59\pi^\circ}{360}$

9. (i) $100^\circ, 60^\circ$ (ii) $250^g, 150^g$, (iii) $30\pi^\circ, 18\pi^\circ$ **10.** $66{\cdot}\dot{6}^g$

11. $\frac{4\pi}{9}, \frac{2}{5}\pi$ **12.** $22\frac{1}{2}^\circ, 67\frac{1}{2}^\circ$ **13.** $\frac{\pi}{4}$ **14.** 63°

15. $66^\circ 40', 21^\circ 36'$ **16.** $\frac{\pi}{3}$ **17.** 96° **18.** $\frac{(n-2)\pi}{n}$

19. $\left(\frac{90}{\pi}+\frac{1}{2}\right)^\circ, \left(\frac{90}{\pi}-\frac{1}{2}\right)^\circ$ অথবা, $\frac{641^\circ}{22}, \frac{619^\circ}{22}$

21. $54^\circ, 81^\circ, 108^\circ, 135^\circ, 162^\circ$; $\frac{3\pi}{10}, \frac{9\pi}{20}, \frac{3\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{10}$

22. 28 গ. **23.** 90° **24.** $6\frac{39}{88}$ ই. **25.** $3\frac{1}{7}$ ই.

26. 2500 ফু **27.** 110 ই. **28.** 856720 মাইল (আসন্ন)

29. $55\frac{1}{2}$ ফু. **30.** $\frac{55}{867}$ মাইল **31.** $1^\circ 25'\,57''$ (প্রায়)

32. 1মা. 287 গ. 3ফু. (আসন্ন) **33.** $\frac{4\pi}{35}, \frac{9\pi}{35}, \frac{14\pi}{35}, \frac{19\pi}{35}, \frac{24\pi}{35}$

34. 123·899 বর্গফুট **35.** 200 ফু. **36.** $94\frac{1}{4}''$ (প্রায়)

37. 5টা 12 মিনিট, বা [illegible]টা $42\frac{6}{11}$ মিনিট **38.** 42, 14

39. $\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}$ **41.** 1টা 36 মিনিট **42.** $7'9{\cdot}54''$

43. 5 : 4 **44.** $\frac{4\pi^\circ}{5}$.

Exercise 2

33. 2 **34.** 0 **35.** 1 **36.** 0 **37.** 0 **38.** 0.

Exercise 3

1. $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$, $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$.

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$ **2.** $\frac{3}{4}, \frac{5}{4}$ **3.** $\frac{12}{5}, \frac{13}{5}$

4. $\frac{3}{5}, \frac{5}{4}$ **5.** $\frac{3}{4}$ **6.** $\frac{60}{11}, \frac{61}{60}$ **13.** $\sin = \frac{4}{5}$, $\cos = \frac{3}{5}$, $\cot = \frac{3}{4}$,
$\sec = \frac{5}{3}$, $\operatorname{cosec} = \frac{5}{4}$ **14.** $\frac{4}{5}$ **15.** $\frac{1}{7}$ **16.** $\frac{16}{63}$.

Exercise 4

2. $\frac{1}{2}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ **3.** 9 **4.** 1 **5.** $1\frac{1}{4}$

6. $9\frac{2}{3}$ **11.** 0 **12.** $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ **13.** 1.

Exercise 5

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ **2.** $x^2 + y^2 = b^2$ **3.** $xy = a^2$

4. $ac = b^2$ **5.** $xy = ab$.

Exercise 6

1. $30°$ **2.** $60°$ **3.** $\theta = 30°$ বা $60°$ **4.** $0°$ বা $90°$
5. $60°$ **6.** $45°$ **7.** $45°$ **8.** $6°$

9. $5°$ **10.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **11.** $x = 3$, $\theta = 30°$

12. $p = 2$, $\theta = 60°$ **13.** $-\frac{5}{3}$ **15.** $60°$ **16.** $0°, 60°$ **17.** $30°$.

Exercise 7

1. 173'2 ফু. বা $100\sqrt{3}$ ফুট **2.** $150\sqrt{3}$ গজ **3.** 103'92 ফু.
4. 10'392 ফু. **5.** 9 ফু. **6.** $15\sqrt{2}$ ফু. **7.** $30°$
8. 68'3 ফু. **9.** 17'32 ফু. **10.** $15\sqrt{3}$ ফু.
11. 141'96 ফু. **12.** 94'64 ফু. **13.** 165'36 ফু. (প্রায়) **14.** 40 ফু.
15. 37'32...ফু. **16.** $40\sqrt{3}$ ফু. **17.** 63'4 ফু. (প্রায়) **18.** $30°$
19. 51'96 ফু., 30 ফু. **20.** 200 ফু. **21.** '866 মা. বা '433 মা.
22. 173'2 গজ **23.** উচ্চতা = 17'32 ফু. একটি খুঁটি হইতে 10 ফুট দূরে
24. 173'2 গজ **25.** 81'96 ফুট (প্রায়) **26.** 30 ফুট।

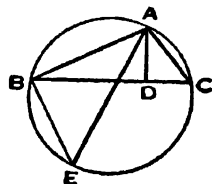
পরিশিষ্ট

কতিপয় অতিরিক্ত উপপাদ্য

ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য [Brahmagupta's Theorem]

1. If from the vertex of a triangle a perpendicular is drawn to the base, the rectangle contained by the other two sides of the triangle is equal to the rectangle contained by the perpendicular and the diameter of the circum-circle.

[C. U. '39 Suppl.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজে BC-র উপর AD লম্ব এবং AE ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের একটি ব্যাস। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB.AC = AD.AE. BE যোগ কর।

চিত্র নং 1

প্রমাণ : △ABE ও △ADC-র ∠E = ∠C (একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ বলিয়া), এবং অর্ধবৃত্তস্থ ∠ABE = এক সমকোণ = ∠ADC.

∴ △ABE ও △ADC সদৃশকোণী।

$\therefore \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}, \qquad AB.AC = AD.AE.$

অনুসিদ্ধান্ত : If a, b, c denote the sides of a triangle and S its area, then R, the circum-radius of the triangle is given by $R = \frac{abc}{4S}$.

[C. U. '39 Suppl.]

△ABC-র ক্ষেত্রফল $S = \frac{1}{2}$ BC.AD, ∴ 4S = 2BC.AD = $2a$. AD.
উপরের উপপাদ্য অনুসারে AE.AD = AB.AC, অর্থাৎ 2R.AD = $c.b$,

$$\therefore \quad 2R = \frac{bc}{AD} = \frac{abc}{a.AD}, \quad \therefore \ R = \frac{abc}{2a.AD} = \frac{abc}{4S}.$$

টলেমির উপপাদ্য [Ptolemy's Theorem]

2. The rectangle contained by the diagonals of a cyclic quadrilateral is equal to the sum of the two rectangles contained by the pairs of opposite sides.
[C. U. '36, '38, '43, '44 ; D. B. '31, '44, '51 G. U. '49, '51]

ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AC ও BD দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

AC.BD = AB.CD + BC.AD.

অঙ্কন : ∠BACর সমান ∠DAP আঁক, AP যেন BD-কে P বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : ∵ ∠BAC = ∠PAD, ∴ উভয়পক্ষে ∠PAC যোগ করিলে ∠BAP = ∠CAD হইল।

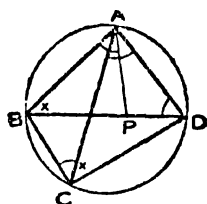
চিত্র নং 2

∠ABD = ∠ACD (একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া), ∴ △ABP ও △ACD সদৃশকোণী, ∴ $\frac{BP}{CD} = \frac{AB}{AC}$, ∴ BP.AC = CD.AB···(1)

আবার, △APD ও △ABC-র ∠ADP = ∠ACB (একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া), এবং ∠PAD = ∠BAC (অঙ্কন), ∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

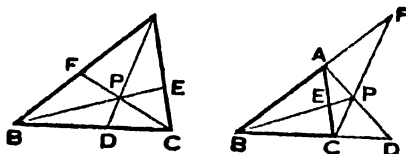
∴ $\frac{PD}{BC} = \frac{AD}{AC}$, ∴ PD.AC = BC.AD······(2) ;

এক্ষণে (1) ও (2) যোগ করিলে BP.AC + PD.AC = AB.CD + BC.AD ;
কিন্তু BP.AC + PD.AC = AC(BP + PD) = AC.BD,

∴ AC.BD = AB.CD + BC.AD.

সিভার উপপাদ্য [Ceva's Theorem]

3. If three straight lines drawn from the vertices of a triangle to meet the opposite sides are concurrent, then the product of the three ratios of the segments into which they divide the sides is equal to 1.

Or, [If three concurrent straight lines are drawn from the angular points of a triangle to meet the opposite sides or these sides produced, the product of the three alternate segments taken in order is equal to the product of the other three segments.]

$\triangle$ABC-র A, B ও C শীর্ষবিন্দুগুলি হইতে তিনটি সমবিন্দু সরলরেখা যথাক্রমে BC, AC ও AB-কে D, E ও F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং পরস্পর P বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1.$

চিত্র নং 3

প্রমাণঃ $\because$ $\triangle ABP$ ও $\triangle BPC$ একই ভূমি BP-র উপর অবস্থিত,

$\therefore$ $\frac{\triangle ABP}{\triangle BPC}=\frac{AE}{CE}$. অনুরূপে $\frac{\triangle BPC}{\triangle APC}=\frac{BF}{AF}$ এবং $\frac{\triangle APC}{\triangle ABP}=\frac{CD}{BD}$.

এক্ষণে এই অনুপাত তিনটি গুণ করিয়া হয়,

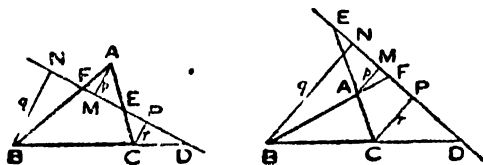
$\frac{AE}{CE}\cdot\frac{BF}{AF}\cdot\frac{CD}{BD}=\frac{\triangle ABP}{\triangle BPC}\cdot\frac{\triangle BPC}{\triangle APC}\cdot\frac{\triangle APC}{\triangle ABP}=1.$ $\therefore$ $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1.$

[দ্রষ্টব্যঃ (1) C U. '40-তে প্রদত্ত প্রশ্নের উত্তরে আর একটু এই লিখিতে হইবে, $\therefore$ BD.CE.AF=DC.AE.BF.]

মেনেলসের উপপাদ্য [Menelaus' Theorem]

4. If a transversal cuts the sides of a triangle, then the product of the three ratios of the segments into which it divides the sides is equal to 1.

Or, [If a straight line cuts the sides or the sides produced of a triangle, the product of three alternate segments taken in order is equal to the product of the remaining segments.]

মনে কর, DEF ভেদকটি $\triangle ABC$র BC, CA ও BA বাহুকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1.$$

চিত্র নং 4

অঙ্কন: ভেদকটির উপর AM, BN ও CP লম্ব টান। মনে কর, $AM=p$, $BN=q$ ও $CP=r$ দৈর্ঘ্য একক।

প্রমাণ: $\because$ CP ও BN, DF-এর উপর লম্ব, $\therefore$ CP ∥ BN ; সুতরাং $\triangle BND$ ও $\triangle CPD$ সদৃশকোণী, $\frac{BD}{CD}=\frac{q}{r}$.

অনুরূপে $\triangle CPE$ ও $\triangle AME$ সদৃশকোণী, $\frac{CE}{AE}=\frac{r}{p}$,

এবং $\triangle AMF$ ও $\triangle BNF$ সদৃশকোণী, $\therefore$ $\frac{AF}{BF}=\frac{p}{q}$.

এই অনুপাতগুলির গুণফল হইতে পাই, $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=\frac{q}{r}\cdot\frac{r}{p}\cdot\frac{p}{q}=1.$

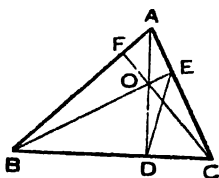
5. Perpendiculars drawn from the vertices of a triangle to the opposite sides are concurrent.

[C. U. '30, '37 ; D. B. '26, '49, '50]

Or, [The altitudes of a triangle are concurrent.]

মনে কর, ABC ত্রিভুজে AD ও BE যথাক্রমে BC ও AC বাহুর উপর লম্ব এবং উহারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। CO যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন ABকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে যে CF⊥AB.

চিত্র নং 5

প্রমাণ: DE যোগ কর। $\because$ ∠BEA ও ∠BDA সমকোণ, $\therefore$ ABDE বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

$\therefore$ $\angle BAD = \angle BED = \angle OED$ (একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া)।

আবার, $\angle OEC$ ও $\angle ODC$ সমকোণ বলিয়া ODCE বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

$\therefore$ $\angle OED = \angle OCD$. $\therefore$ $\angle OAF = \angle OED = \angle OCD$.

এক্ষণে, $\angle COD + \angle OCD = 1$ সমকোণ ($\because$ $\angle ODC$ সমকোণ), এবং $\angle COD = \angle AOF$. $\therefore \angle OAF + \angle AOF = \angle COD + \angle OCD = 1$ সমকোণ,

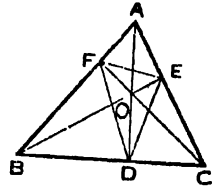
$\therefore$ $\angle AFO$ এক সমকোণ। $\therefore$ $CF \perp AB$.

অতএব লম্বত্রয় সমবিন্দু হইল।

[দ্রষ্টব্য : এই লম্বত্রয় যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাকে ত্রিভুজের লম্ববিন্দু (Ortho-centre) বলে এবং উহাকে সাধারণত O দ্বারা সূচিত করা হয়।]

6. In an acute-angled triangle, the perpendiculars drawn from the vertices to the opposite sides bisect the angles of the pedal triangle. [C. U. '49]

[দ্রষ্টব্য : কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দু তিনটি যোগ করিয়া যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাহাকে পাদ-ত্রিভুজ (Pedal triangle) বলে।]

AD, BE ও CF লম্বত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, DEF পাদ-ত্রিভুজে $\angle D$, $\angle E$ ও $\angle F$ যথাক্রমে AD, BE ও CF দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

চিত্র নং 6

প্রমাণ : $\because$ $\angle OFD$ ও $\angle ODB$ সমকোণ, $\therefore$ BDOF বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ, $\therefore$ $\angle ODF = \angle OBF$ (একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া)। আবার, $\because$ BCEF বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ($\angle CFB$ ও $\angle BEC$ সমকোণ বলিয়া), $\therefore$ $\angle EBF = \angle FCE$, অর্থাৎ $\angle OBF = \angle OCE$ $\therefore$ $\angle ODF = \angle OCE$.

এক্ষণে, $\because$ ODCE বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ($\because$ $\angle ODC$ ও $\angle OEC$ সমকোণ)

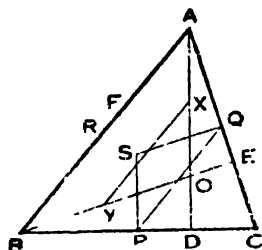
$\therefore$ $\angle OCE = \angle ODE$ ($\because$ একই বৃত্তাংশস্থ), $\therefore$ $\angle ODF = \angle ODE$,

$\therefore$ $\angle FDE$, AD দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত। অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, BE দ্বারা $\angle FED$ এবং CF দ্বারা $\angle DFE$ সমদ্বিখণ্ডিত।

7. The distance of the circum-centre from any side

of a triangle is half the distance of the ortho-centre from the opposite vertex. [cf. C. U. '10]

চিত্র নং 7

মনে কর, ABC ত্রিভুজের AD, BE ও CF লম্বত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, সুতরাং O লম্ববিন্দু হইল। মনে কর, △ABCর পরিকেন্দ্র S এবং P, Q, R যথাক্রমে BC, AC ও ABর মধ্যবিন্দু, সুতরাং SP, SQ, SR যথাক্রমে BC, AC ও ABর উপর লম্ব হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $SP=\frac{1}{2}AO$, $SQ=\frac{1}{2}BO$ এবং $SR=\frac{1}{2}CO$. AOর মধ্যবিন্দু X এবং BOর মধ্যবিন্দু Y লও। XY ও PQ যোগ কর।

প্রমাণ : △AOBর AOর মধ্যবিন্দু X এবং BOর মধ্যবিন্দু Y, ∴ XY, ABর সমান্তরাল ও অর্ধেক। আবার CAর মধ্যবিন্দু Q ও BCর মধ্যবিন্দু P, ∴ PQ, ABর সমান্তরাল ও অর্ধেক। ∴ PQ ও XY সমান ও সমান্তরাল। আবার, SP ∥ AD বা XO (উভয়ে BCএর উপর লম্ব বলিয়া); অনুরূপে SQ ∥ BE বা YO. অতএব SP ও PQএর মধ্যবর্তী ∠SPQ = XO ও YX-এর মধ্যবর্তী ∠YXO, এবং অনুরূপে ∠PSQ = ∠XOY.

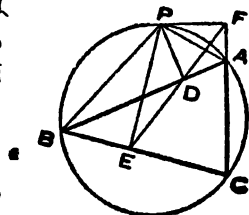
∴ △PSQ ও △XOY সর্বসম। ∴ $SP=XO=\frac{1}{2}AO$.

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে $SQ=\frac{1}{2}BO$ এবং $SR=\frac{1}{2}CO$.

8. The feet of the perpendiculars drawn to the three sides of a triangle from any point of its circum-circle are collinear. [C. U. '36, '39, '41, '50 ; G. U. '50, '52]

চিত্র নং 8

△ABCর পরিবৃত্তের পরিধিস্থ যে কোন বিন্দু P হইতে AB, BC ও CAর উপর যথাক্রমে PD, PE ও PF লম্ব টানা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, D, E, F বিন্দুত্রয় এক সরলরেখায় অবস্থিত।

DE, FD, PA ও PB যোগ কর।

প্রমাণ : ∵ ∠PDA ও ∠PFA সমকোণ,

∴ PDAF বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

∴ ∠PDF = ∠PAF (একই বৃত্তাংশস্থ)

∠PBC (∵ APBC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ)।

আবার, $\because$ $\angle PDB$ ও $\angle PEB$ সমকোণ, $\therefore$ PDEB বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,
$\therefore$ $\angle PBE + \angle PDE = 2$ সমকোণ। কিন্তু $\angle PDF = \angle PBE$ (প্রমাণিত)
$\therefore$ $\angle PDF + \angle PDE = 2$ সমকোণ। $\therefore$ DE ও DF একই সরলরেখা অর্থাৎ D, E, F বিন্দুত্রয় এক সরলরেখায় অবস্থিত।

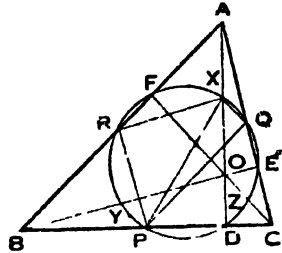
[দ্রষ্টব্য : এই লম্বত্রয়ের পাদবিন্দু তিনটি যে সরলরেখায় অবস্থিত তাহাকে **পাদরেখা** (Pedal line বা Simson's line) বলে।]

9. In any triangle the middle points of the sides, the feet of the perpendiculars from the vertices to the opposite sides, and the mid points of the joins of the ortho-centre, to the vertices are concyclic.
[C. U. '26, '37, '40, '44, '50 ; W. B. S. F. '52 ; G. U. '49, '52]

$\triangle ABC$র বাহুগুলির উপর AD, BE ও CF লম্বত্রয়ের পাদবিন্দু D, E, F ; O লম্ব-বিন্দু ; P, Q, R যথাক্রমে BC, AC ও ABর মধ্যবিন্দু ; এবং X, Y, Z যথাক্রমে AO, BO, COর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে যে D, E, F, P, Q, R, X, Y, Z এই বিন্দুগুলি একই বৃত্তের পরিধিস্থ।

PX, RX, RP, QX, PQ যোগ কর।

চিত্র নং 9

প্রমাণ : $\because$ $\triangle ABO$র AB বাহুর মধ্যবিন্দু R এবং AO বাহুর মধ্যবিন্দু X, $\therefore$ RX $\parallel$ BO বা BE. $\because$ R ও P যথাক্রমে AB ও BCর মধ্যবিন্দু, $\therefore$ RP $\parallel$ AC.
এক্ষণে $\angle PRX$ এর বাহুদ্বয় যথাক্রমে $\angle AEB$র বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং কোণ দুইটি পরস্পর বিপরীত দিকে অবস্থিত,
$\therefore$ $\angle PRX + \angle AEB = 2$ সমকোণ, কিন্তু $\angle AEB$ এক সমকোণ, $\therefore$ $\angle PRX =$ এক সমকোণ। এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে $\angle PQX =$ এক সমকোণ। অতএব, R, Q, D বিন্দুতে PX-এর সম্মুখকোণ এক সমকোণ। $\therefore$ PX-কে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্ত P, X, R, D, Q বিন্দুগুলি দিয়া যাইবে। অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, ঐ বৃত্তটি E, F, Y, Z বিন্দু দিয়াও যাইবে। অতএব D, E, F, P, Q, R, X, Y, Z বিন্দুগুলি একই বৃত্তস্থ।

[দ্রষ্টব্য : (1) ত্রিভুজের ঐ বিন্দু নয়টি দিয়া যে বৃত্ত অঙ্কিত হয় তাহাকে ত্রিভুজটির **নব-বিন্দু বৃত্ত** (Nine-point Circle) বলে। (2) ঐ বৃত্তের কেন্দ্রকে **নব-বিন্দু কেন্দ্র** (Nine-point Centre) বলে। (3) ত্রিভুজের

লম্ববিন্দু হইতে কোন শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত রেখার মধ্যবিন্দু ও বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখাকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তই এই নব-বিন্দু-বৃত্ত। (4) এই 9টি বিন্দুর মধ্যে যে কোন 6টির মধ্য দিয়া বৃত্ত অঙ্কন করিতে বলিলে নব-বিন্দু বৃত্ত আঁকিতে হইবে।]

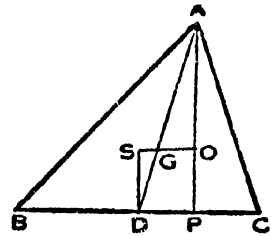
বিবিধ সমাধান

উদা. 1. Prove that the circum-centre, the centroid and the ortho-centre of a triangle are collinear. [C. U. '27, '51]

মনে কর, $\triangle ABC$র পরিকেন্দ্র S, লম্ববিন্দু O এবং BCর মধ্যবিন্দু D. SD, SO এবং AD যোগ কর। AD মধ্যমা যেন SOকে G বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে G বিন্দু ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র (centroid)।

চিত্র নং 10

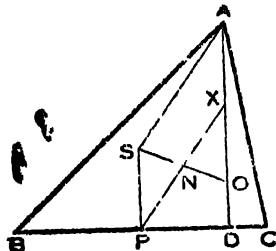
প্রমাণ: $\because$ SD ও AP উভয়েই BCর উপর লম্ব, $\therefore$ SD ∥ AO.

$\therefore$ $\angle GSD$ = একান্তর $\angle AOG$, এবং $\angle SGD$ = বিপ্রতীপ $\angle AGO$. $\therefore$ $\triangle GSD$ ও $\triangle GOA$ সদৃশকোণী। $\therefore$ $\frac{GD}{AG}=\frac{SD}{AO}=\frac{1}{2}$

($\because$ কোন বাহু হইতে পরিকেন্দ্রের দূরত্ব লম্ববিন্দু হইতে বিপরীত শীর্ষবিন্দুর দূরত্বের অর্ধেক), $\therefore$ $GD=\frac{1}{2}AG$, সুতরাং AD মধ্যমা G বিন্দুতে সমত্রিখণ্ডিত হইয়াছে। $\therefore$ G বিন্দু ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র। অতএব, ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র S, লম্ববিন্দু O এবং ভরকেন্দ্র G একই সরলরেখায় অবস্থিত।

উদা. 2. The centre of the nine-point circle is the middle point of the straight line which joins the ortho-centre to the circum-centre.

মনে কর, $\triangle ABC$র পরিকেন্দ্র S এবং লম্ববিন্দু O. প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\triangle ABC$র নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র SO সরলরেখার মধ্যবিন্দু।

চিত্র নং 11

অঙ্কন: SO যোগ কর। BCর মধ্যবিন্দু P এবং AOর মধ্যবিন্দু X লও। PX যোগ কর, উহা যেন SOকে N বিন্দুতে ছেদ

করিল। SP যোগ কর, AOকে বর্ধিত করিয়া BCকে D বিন্দুতে ছেদ কর।

প্রমাণ ঃ ∵ S পরিকেন্দ্র ও BCর মধ্যবিন্দু P, ∴ $SP \perp BC$. ∵ $SP \perp BC$ ও $AD \perp BC$, ∴ $SP \parallel AD$. আবার $SP = \frac{1}{2}AO = OX$. এক্ষণে $\triangle SPN$ ও $\triangle XON$এর $SP = OX$, $\angle PSN$ = একান্তর $\angle XON$ এবং $\angle SNP$ = বিপ্রতীপ $\angle XNO$. ∴ $SN = ON$ এবং $PN = NX$, অর্থাৎ N বিন্দু SO এবং PXএর মধ্যবিন্দু। ∵ PX নব-বিন্দু বৃত্তের ব্যাস, ∴ উহার মধ্যবিন্দু N নব-বিন্দু-বৃত্তের কেন্দ্র। অতএব নব-বিন্দু-বৃত্তের কেন্দ্র SOর মধ্যবিন্দু।

উদা. 3. Prove that the radius of the nine-point circle is half the radius of the circum-circle. [C. U. '40 ; G. U. '50]

[**Hints ঃ** (চিত্র নং 11 দেখ।) $SP = \frac{1}{2}AO = AX$ এবং $SP \parallel AD$ বা AX, ∴ SP ও AX সমান ও সমান্তরাল। ∴ ASPX একটি সামান্তরিক হইল। ∴ $PX = SA$, ∴ $\frac{1}{2}PX = \frac{1}{2}SA$. এখানে PX নব-বিন্দু-বৃত্তের ব্যাস এবং SA পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ। ∴ নব-বিন্দু-বৃত্তের ব্যাসার্ধ পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের অর্ধেক।]

উদা. 4. Prove that the circum-centre, the ortho-centre, the centroid and the nine-point centre of a triangle are collinear. [C. U. '34]

[**Hints :** চিত্র নং 10 আঁকিয়া উদা. 1-এর মত প্রথমে প্রমাণ কর যে, S, G, O অর্থাৎ পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু এক সরলরেখায় অবস্থিত। তারপর AOর মধ্যবিন্দু X-এর সহিত D যোগ কর, XD যেন SOকে N বিন্দুতে ছেদ করিল এখন উদা. 2-এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে N বিন্দু নববিন্দুবৃত্তের কেন্দ্র। উহা SOর উপর অবস্থিত বলিয়া S, O, G এবং N একই সরলরেখায় অবস্থিত হইল।]

সঞ্চারপথ

উদা. 1. Given the base and the vertical angle of a triangle, find the locus of its ortho-centre.

[চিত্র আঁকিয়া লও। মনে কর, $\triangle ABC$র ভূমি BC নির্দিষ্ট এবং শীর্ষকোণ $\angle A$ একটি নির্দিষ্ট $\angle X$-এর সমান। B ও C বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর যথাক্রমে BD ও CE লম্ব টান, উহারা যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল। এই লম্ববিন্দু O-এর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

∵ ADOE চতুর্ভুজের $\angle D$ ও $\angle E$ প্রত্যেকে সমকোণ ∴ $\angle DOE + \angle A = 2$ সমকোণ। কিন্তু $\angle A$-র পরিমাণ নির্দিষ্ট বা ধ্রুবক, ∴ $\angle BOC = \angle DOE =$ ধ্রুবক। অতএব, লম্ববিন্দু O তে BO ভূমির সম্মুখ-কোণ ধ্রুবক হওয়ায় B, O, C দিয়া অঙ্কিত বৃত্তের (অর্থাৎ BCর উপর $\angle BOC$ ধারণক্ষম বৃত্তাংশের) BOC চাপই O বিন্দুর উদ্দিষ্ট সঞ্চারপথ হইল।

উদা. 2. Given the base and the vertical angle of a triangle, find the locus of its in-centre. [C. U. '19]

মনে কর, $\triangle ABC$র ভূমি BC নির্দিষ্ট এবং শিরঃকোণ-A একটি নির্দিষ্ট X কোণের সমান। $\angle B$ ও $\angle C$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় যেন I-বিন্দুতে ছেদ করিল। এই অন্তঃকেন্দ্র I-এর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

$\triangle BIC$র $\angle BIC + \angle IBC + \angle ICB = 180°$, অর্থাৎ $\angle BIC + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 180° \cdots\cdots(1)$. $\triangle ABC$র $\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 90° \cdots (2)$. এখন (1) হইতে (2) বিয়োগ করিলে $\angle BIC - \frac{1}{2}\angle A = 90°$.

∴ $\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A = 90° + \frac{1}{2}\angle X =$ ধ্রুবক। সুতরাং BC নির্দিষ্ট ভূমির উপর I-বিন্দুতে সম্মুখ-কোণ ধ্রুবক হওয়ায় B, I ও C বিন্দুগামী বৃত্তের (বা BCর উপর $\angle BIC$ ধারণক্ষম বৃত্তাংশের) BIC চাপ অন্তঃকেন্দ্র I-এর সঞ্চারপথ হইল।

উদা 3. Given the base and the vertical angle of a triangle, find the locus of its centroid.

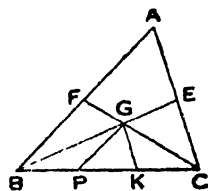
$\triangle ABC$র ভূমি BC ও শিরঃকোণ A নির্দিষ্ট, BE ও CF মধ্যমাদ্বয় G বিন্দুতে ছেদ করিল। G ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

GP ∥ AB, GK ∥ AC টান, উহারা BCকে যথাক্রমে P ও K বিন্দুতে ছেদ করিল।

চিত্র নং 12

∵ GP ∥ AB, ∴ $\angle GPK = \angle ABC$.

∵ GK ∥ AC, ∴ $\angle GKP = \angle ACB$. ∴ $\angle PGK = \angle A =$ ধ্রুবক। আবার, ∵ ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে ছেদ করে ∴ $FG = \frac{1}{3}CF$ এবং $EG = \frac{1}{3}BE$. এক্ষণে, ∵ GP ∥ FB, ∴ $\frac{BP}{BC} = \frac{FG}{FC} = \frac{1}{3}$,

∴ $BP = \frac{1}{3}BC$. অনুরূপে $KC = \frac{1}{3}BC$. ∴ $PK = \frac{1}{3}BC$.

∵ BC নির্দিষ্ট, ∴ PK একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং উহার উপর G বিন্দুতে সম্মুখ-কোণ ধ্রুবক।

∴ PK রেখার উপর ∠A ধারণক্ষম বৃত্তাংশের PGK চাপই নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

উদা. 4 Given the base and the vertical angle of a triangle, find the locus of the nine-point centre.

মনে কর, △ABCর ভূমি BC নির্দিষ্ট এবং শিরঃকোণ-BAC একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান। মনে কর N ত্রিভুজের নব-বিন্দু কেন্দ্র।

N-এর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

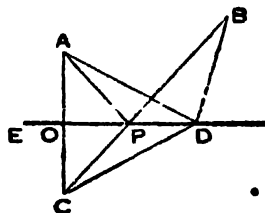
BCর মধ্যবিন্দু D লও, DN যোগ কর। এক্ষণে DN নব-বিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ হইল। ∵ নব-বিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের অর্ধেক হয়, ∴ DN, △ABCর পরিব্যাসার্ধের অর্ধেক। আবার, △ABCর ভূমি ও শিরঃকোণ নির্দিষ্ট বলিয়া উহার পরিবৃত্ত নির্দিষ্ট, সুতরাং উহার পরিব্যাসার্ধও নির্দিষ্ট। ∴ DN ধ্রুবক। ∵ BC নির্দিষ্ট, ∴ উহার মধ্যবিন্দু D স্থিরবিন্দু। অতএব, এই স্থিরবিন্দু D হইতে গতিশীল N বিন্দুর দূরত্ব সর্বদা DN-এর সমান বা ধ্রুবক। ∴ Dকে কেন্দ্র করিয়া DN (বা পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের অর্ধেক) ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তের পরিধি N বিন্দুর সঞ্চারপথ।

চরম ও অবম [Maxima and Minima]

(গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান)

উদা. 1. A and B are two points on the same side of an unlimited straight line. Find a point P on the straight line such that the sum of the distances of the point from A and B is a minimum. [C. U. ; D. B. '49, '50]

EF অসীম সরলরেখার একই দিকে A ও B দুইটি বিন্দু। EF-এর উপর এমন একটি P বিন্দু নির্ণয় করিতে হইবে যেন A ও B হইতে তাহার দূরত্বের সমষ্টি লঘিষ্ঠ হয়।

অঙ্কন: AO⊥EF টান। AO-কে C পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন CO = AO হয়। CB যোগ কর, উহা EF-কে P বিন্দুতে ছেদ করিল। P নির্ণেয় বিন্দু।

চিত্র নং 13

প্রমাণ : EF-এর উপর অন্য যে কোন বিন্দু D লও। AP, AD, CD, BD যোগ কর। ∵ P ও D বিন্দু ACর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত, ∴ AP=CP এবং AC=CD. এখন AP+BP=CP+BP=BC, কিন্তু BC<BD+CD, ∴ BC<BD+AD. ∴ AP+BP<AD+BD, ইহা D বিন্দুর EF-এর উপর যে কোন অবস্থানেই সত্য।

∴ P নির্ণেয় বিন্দু।

[দ্রষ্টব্য : AP ও BP, EF-এর সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করিলে AP+BP লঘিষ্ঠ হয়।]

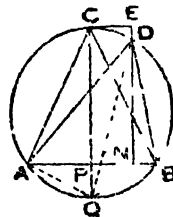
উদা. 2. Of all triangles standing on the same base and having the same vertical angle, prove that the isosceles triangle has (i) the greatest area, (ii) the greatest perimeter.
[E. B. S. B. '50 , C. U. '41]

মনে কর, AB ভূমির উপর ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং ADB অন্য যে কোন ত্রিভুজ, উহাদের শিরঃকোণ ∠C ও ∠D সমান। প্রমাণ করিতে হইবে যে

(i) △ABC>△ABD, এবং

(ii) △ABCর পরিসীমা>△ADBর পরিসীমা।

অঙ্কন : (i) CP⊥AB এবং DN⊥AB টান।

প্রমাণ : ∵ ABর উপর C ও D বিন্দুস্থ কোণদ্বয় সমান, ∴ A, B, D, C একই বৃত্তস্থ। ABDC বৃত্তের C বিন্দুতে CE স্পর্শক টান।

চিত্র নং 14

NDকে বর্ধিত করিয়া CEকে E বিন্দুতে ছেদ কর। এক্ষণে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমি ABর উপর CP লম্ব বলিয়া উহা ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। সুতরাং CP বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া গিয়াছে। ∴ CE স্পর্শক, CPর উপর লম্ব। ∴ CE ∥ AB.

আবার, CP ∥ EN, ∴ CP=EN, ∴ CP>DN. অতএব △ABCর উচ্চতা △ABDর উচ্চতা অপেক্ষা অধিক বলিয়া △ABC>△ABD.

(ii) CPকে বর্ধিত করিয়া পরিধিকে Q বিন্দুতে ছেদ কর। AQ, BQ, DQ যোগ কর।

প্রমাণ : ∵ Q বিন্দু AB লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত, ∴ AQ=BQ, CQ কেন্দ্রগামী জ্যা বলিয়া উহা ব্যাস, সুতরাং CQ>অপর জ্যা DQ.

এক্ষণে, টলেমীর উপপাদ্য অনুসারে, BQ.AC+AQ.BC=AB.CQ, বা AQ(AC+BC)=AB.CQ (∵ AQ=BQ)…(1).

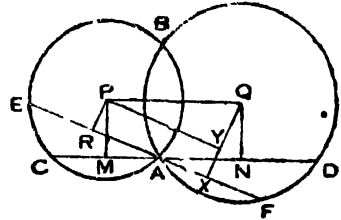
আবার, BQ.AD + AQ.BD = DQ.AB বা AQ(AD + BD) = DQ.AB ·· (2)

$\therefore$ (1) ও (2) হইতে $\frac{AQ(AC+BC)}{AQ(AD+BD)}=\frac{AB.CQ}{AB.DQ}$, বা $\frac{AC+BC}{AD+BD}=\frac{CQ}{DQ}$,

কিন্তু CQ > DQ, $\therefore$ AC + BC > AD + BD.

$\therefore$ AC + BC + AB > AD + BD + AB.

উদা. 3. Of the straight lines through a point of intersection of two circles and terminated by the circumferences, the maximum is that which is parallel to the line of centres.

মনে কর, P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয় A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। A বিন্দু দিয়া CD ∥ PQ টান, উহা যেন পরিধিদ্বয়কে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল। A দিয়া অন্য যে কোন সরলরেখা EF টান, উহা যেন পরিধিদ্বয়কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, CD > EF.

চিত্র নং 15

অঙ্কন : CDর উপর PM ও QN লম্ব টান, EFএর উপর PR ও QX লম্ব এবং PY⊥QX টান।

প্রমাণ : ∵ কেন্দ্র হইতে PM⊥AC, ∴ AM = CM, ∴ AM = $\frac{1}{2}$AC.
∵ QN⊥AD, ∴ AN = $\frac{1}{2}$AD, ∴ MN = $\frac{1}{2}$CD. অনুরূপে RX = $\frac{1}{2}$EF.
এক্ষণে, PQ = MN = $\frac{1}{2}$CD এবং PY = RX = $\frac{1}{2}$EF.
∵ ∠PYQ সমকোণ, ∴ PQ > PY, ∴ $\frac{1}{2}$CD > $\frac{1}{2}$EF, ∴ CD > EF.

উদা. 4. To find a point within a triangle such that the sum of its distances from the vertices is a minimum.

△ABC-র AB ও AC-র উপর 120° কোণ ধারণক্ষম দুইটি বৃত্তাংশ আঁক, উহারা যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল। O উদ্দিষ্ট বিন্দু হইল।

প্রমাণ : AO, BO, CO যোগ কর। O বিন্দুতে PQ⊥AO টান, উহা যেন ABকে Pতে এবং ACকে Qতে ছেদ করিল। ∵ AO⊥PQ, ∴ A হইতে PQ পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাগুলির মধ্যে AO ক্ষুদ্রতম। আবার, ∠BOP = ∠COQ = 30°. ∵ BO, CO সরলরেখাদ্বয় PQএর সহিত O বিন্দুতে সমান কোণে নত আছে, ∴ PQএর উপর O বিন্দুরই B ও C বিন্দু

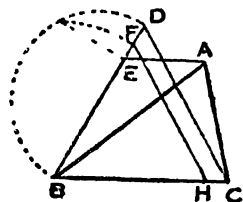
হইতে দূরত্বের সমষ্টি অর্থাৎ BO+CO ক্ষুদ্রতম (উদা. 1 দেখ)। সুতরাং O বিন্দুর দূরত্বগুলির সমষ্টি AO+BO+CO লঘিষ্ঠ হইল।

সম্পাদ্য সম্বন্ধীয় বিবিধ সমাধান

উদা. 1. Draw an equilateral triangle equal in area to a given triangle. [C. U. '39 Suppl. ; '50 (High)]

প্রদত্ত $\triangle ABC$, ইহার সমান একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকিতে হইবে।

চিত্র নং 16

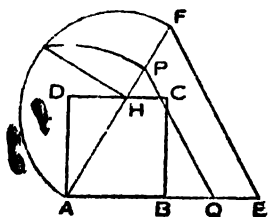
অঙ্কন : BCর উপর DBC সমবাহু ত্রিভুজ আঁক। AE ∥ BC টান, উহা BDকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। BD হইতে BE ও BDর মধ্যসমানুপাতীর সমান BF অংশ কাট। FH ∥ DC টান, উহা যেন BCকে H বিন্দুতে ছেদ করিল। $\triangle BFH$ উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : $\because$ FH ∥ DC, $\therefore$ $\angle BFH = \angle D$, $\angle BHF = \angle DCB$, $\therefore$ $\triangle BFH$ ও $\triangle DBC$ সদৃশকোণী, $\therefore$ $\triangle BFH$ সমবাহু।

এক্ষণে, $\frac{\triangle BFH}{\triangle BDC} = \frac{BF^2}{BD^2} = \frac{BE.BD}{BD^2}$ ($\because$ BF মধ্যসমানুপাতী) $= \frac{BE}{BD}$.

আবার, EC যোগ করিলে $\frac{\triangle BEC}{\triangle BDC} = \frac{BE}{BD}$. $\therefore$ $\frac{\triangle BFH}{\triangle BDC} = \frac{\triangle BEC}{\triangle BDC}$.

$\therefore$ $\triangle BFH = \triangle BCE$ কিন্তু $\triangle BCE = \triangle ABC$ (কারণ, উহারা একই ভূমির উপর দুই সমান্তরাল রেখার মধ্যে অবস্থিত), $\therefore$ $\triangle BFH = \triangle ABC$.

উদা. 2. Construct an equilateral triangle equal in area to a given square.

প্রদত্ত ABCD বর্গের ABকে E পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন BE = AB হয়। AEর উপর AEF সমবাহু ত্রিভুজ আঁক। AF যেন DCকে H বিন্দুতে ছেদ করিল। AF হইতে AH ও AF-এর মধ্যসমানুপাতীর সমান AP অংশ কাট। PQ ∥ FE টান, উহা যেন AEকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। $\triangle APQ$ উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

চিত্র নং 17

প্রমাণ : ∵ PQ ∥ FE, ∴ △APQ ও △AFE সদৃশকোণী,

∴ △APQ সমবাহু।

∴ $\frac{\triangle APQ}{\triangle AFE}=\frac{AP^2}{AF^2}=\frac{AH.AF}{AF^2}$ (∵ AP মধ্যসমানুপাতী) $=\frac{AH}{AF}$.

HE যোগ করিলে $\frac{\triangle AHE}{\triangle AFE}=\frac{AH}{AF}$; ∴ $\frac{\triangle APQ}{\triangle AFE}=\frac{\triangle AHE}{\triangle AFE}$,

∴ △APQ = △AHE.

আবার, △AHE ও বর্গক্ষেত্র ABCD দুই সমান্তরাল রেখার মধ্যে অবস্থিত এবং ত্রিভুজটির ভূমি বর্গক্ষেত্রটির ভূমির দ্বিগুণ, ∴ △AHE = ABCD বর্গক্ষেত্র।

∴ সমবাহু △APQ = ABCD বর্গক্ষেত্র।

উদা। 3. To construct a triangle similar to a given triangle and equal in area to another given triangle.

△ABCর সমান ও △DEFএর সদৃশ একটি ত্রিভুজ আঁকিতে হইবে।

অঙ্কন : ∠E ও ∠Fএর সমান করিয়া যথাক্রমে ∠CBX ও ∠BCX আঁক। BX ও CX যেন X বিন্দুতে ছেদ করিল। AR ∥ BC টান, AR যেন CXকে R বিন্দুতে ছেদ করিল। CX ও CRএর মধ্যসমানুপাতীর সমান CP অংশ কাট। PQ ∥ XB টান, উহা যেন CBকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

△PCQ উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

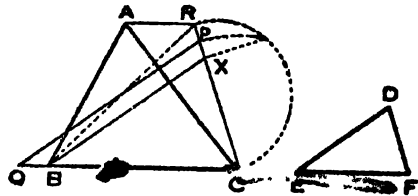
চিত্র নং 18

প্রমাণ : BR যোগ কর।

∵ BX ∥ PQ, ∴ △BCX ও △PCQ সদৃশকোণী, সুতরাং সদৃশ।

∴ $\frac{\triangle PCQ}{\triangle BCX}=\frac{CP^2}{CX^2}=\frac{CX.CR}{CX^2}=\frac{CR}{CX}$

আবার, $\frac{\triangle BCR}{\triangle BCX}=\frac{CR}{CX}$ (∵ উহাদের একই উচ্চতা), ∴ $\frac{\triangle PCQ}{\triangle BCX}=\frac{\triangle BCR}{\triangle BCX}$.

∴ △PCQ = △BCR = △ABC (∵ AR ∥ BC). আবার, ∵ BX ∥ PQ, ∴ ∠PQC = ∠XBC = ∠E এবং ∠PCQ = ∠F. ∴ △PCQ ও △DEF সদৃশ। ∴ △PCQ, △ABCর সমান এবং △DEF-এর সদৃশ হইল।

Miscellaneous Exercise

[Algebra]

1. Solve $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-3}}.$

যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা পাই $\dfrac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{2\sqrt{2x+3}}{2\sqrt{2x-3}}$

বা, $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{2x-3}}$, বা, $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{2x+3}{2x-3}$ [বর্গ করিয়া]

বা, $2x^2+x-3=2x^2-x-3$, or, $2x=0$, $\therefore$ $x=0$.

2. Solve $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{2}$. [B. U.] [Ans. $x=\frac{5}{4}$]

3. Solve $\dfrac{\sqrt[3]{2x+3}+\sqrt[3]{x-11}}{\sqrt[3]{2x+3}+\sqrt[3]{x-11}}=2.$ [Ans. $x=12$]

[1এর ন্যায় সমাধান কর]

4 Solve : $y+z=\dfrac{1}{x}$, $z+x=\dfrac{1}{y}$, $x+y=\dfrac{1}{z}$. [G. U. '49]

সমীকরণ 3টি হইতে পাই $xy+xz=1\cdots(1)$, $yz+xy=1\cdots(2)$

এবং [illegible] $=1\cdots(3)$.

$(1)+(2)+(3)$ করিয়া পাই $2(xy+yz+zx)=3$,

বা, $xy+yz+zx=\frac{3}{2}\cdots\quad\cdots(4)$

এক্ষণে, $(4)-(1)$ করিয়া পাই $yz=\frac{1}{2}\cdots\quad\cdots(5)$

$(4)-(2)$,, ,, $zx=\frac{1}{2}\cdots\quad\cdots(6)$

$(4)-(3)$,, ,, $xy=\frac{1}{2}\cdots\quad\cdots(7)$

বাকী অংশ সহজ··· $\left[\text{Ans. } x=y=z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$

5. Solve : $x(2x+3y+4z)=58\cdots\quad\cdots(1)$

$y(2x+3y+4z)=87\cdots\quad\cdots(2)$

$z(2x+3y+4z)=116\cdots\quad\cdots(3)$

(1), (2) ও (3) সমীকরণকে যথাক্রমে 2, 3 ও 4 দ্বারা (অর্থাৎ বন্ধনীর মধ্যস্থিত x, y, zএর সহগ দ্বারা) গুণ করিয়া এবং সেই গুণফলগুলি যোগ করিয়া পাই $(2x+3y+4z)^2=116+261+464=841=(29)^2$,

$\therefore \quad 2x+3y+4z=\pm 29 \cdots\cdots(4)$

এক্ষণে, (1), (2) ও (3)কে (4) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$x=\pm 2,\ y=\pm 3,\ z=\pm 4.$

6. Solve $x^y=y^x \cdots\cdots(1),\ y^a=x^b \quad \cdots(2).$ [C. U. '58]

(1) হইতে $x^{\frac{y}{x}}=y^{\frac{x}{x}}=y$ এবং (2) হইতে $y=x^{\frac{b}{a}}$

$\therefore \quad x^{\frac{y}{x}}=x^{\frac{b}{a}}, \quad \therefore \frac{y}{x}=\frac{b}{a}$, বা, $y=\frac{bx}{a}$

এক্ষণে, (2)-এ yএর স্থানে $\frac{bx}{a}$ বসাইয়া পাই,

$\left(\frac{bx}{a}\right)^a=x^b$, বা, $\left(\frac{b}{a}\right)^a \times x^a=x^b$, বা, $\left(\frac{b}{a}\right)^a=\frac{x^b}{x^a}=x^{b-a}$

$\therefore \quad x=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{b-a}} \quad \therefore \quad y=\frac{bx}{a}=\frac{b}{a}\times\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{b-a}}=\left(\frac{b}{a}\right)^{1+\frac{a}{b-a}}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{b-a}}$

$\therefore \quad x=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{b-a}},\ y=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{b}{b-a}}.$

7. Solve $2^x+3^y=17$ and $2^{x+2}-3^{y+1}=5$. [C. U. '57]

[Ans. $x=3, y=2$]

8. Solve $2^{x-1}+3^{y-1}=4$ and $2^{x+2}+2.3^{y}$ [illegible]

[Ans. $x=1, y=2$] [C. U. '58 (C)]

9. Show that the numerical sum of the coefficients of the terms in the expansion of $(a+b)^8$ is 256

এখানে a ও bএর সহগ 1 এবং 1এর যে-কোন ঘাতও 1 হয়। অতএব, বিস্তৃতির পদগুলিতে $a=1$ ও $b=1$ বসাইলে প্রত্যেক পদ উহার সহগে পরিণত হইবে অর্থাৎ সহগের সমান হইবে। অতএব, নির্ণেয় সহগগুলির যোগফল $=(1+1)^8=2^8=256.$

10. Find the value of $(2+3\sqrt{-5})^{\frac{1}{2}}+(2-3\sqrt{-5})^{\frac{1}{2}}$.

[Ans. $\pm 3\sqrt{2}$] [Pat. '55]

11. If $ma^3 - 3na^2 + 3pa - q$ be a perfect cube, show that $n^2 = mp$ and $n^3 = m^2q$.

মনে কর, $ma^3 - 3na^2 + 3pa - q = (xa - y)^3$

$= x^3a^3 - 3x^2ya^2 + 3xy^2a - y^3.$

$\therefore$ এখানে $m = x^3$, $n = x^2y$, $p = xy^2$, $q = y^3$

$\therefore$ $n^2 = x^4y^2 = x^3 \; xy^2 = mp$ এবং $n^3 = x^6y^3 = m^2q$.

[Trigonometry]

Prove that :—

1. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} + \sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = 2\sec\theta.$

বামপক্ষ $= \sqrt{\dfrac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}} + \sqrt{\dfrac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}} + \sqrt{\dfrac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$

$= \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{2}{\cos\theta} = 2\sec\theta.$

2. $\cos\theta + \dfrac{\tan\theta\cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = 1 + \sec\theta.$ [B. U.]

3. $\dfrac{\sin A + \sec A}{\cos A + \operatorname{cosec} A} = \tan A.$ [B.H.U. '45]

4. $\tan^2 A - \tan^2 B = \dfrac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A \cos^2 B}.$ [C. U. '36]

বামপক্ষ $= \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - \dfrac{\sin^2 B}{\cos^2 B} = \dfrac{\sin^2 A\cos^2 B - \sin^2 B\cos^2 A}{\cos^2 A\cos^2 B}$

$= \dfrac{\sin^2 A(1-\sin^2 B) - \sin^2 B(1-\sin^2 A)}{\cos^2 A\cos^2 B}$

$= \dfrac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B}.$

5. $\dfrac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta}=\left(\dfrac{1-\tan\theta}{1-\cot\theta}\right)^2$ [W. B. S. F. '56]

6. $(\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta)^2=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}.$ [B. H U. '40]

7. $\dfrac{\cot\theta}{\operatorname{cosec}\theta-1}-\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=2\tan\theta.$

8 $1-\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cot\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\tan\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha.$ [B. H. U. '44]

9 $\sec^2\phi\tan\phi+2\sec\phi\operatorname{cosec}\phi+\operatorname{cosec}^2\phi\cot\phi$
$=\sec^3\phi\operatorname{cosec}^3\phi$ [B H. U. '42]

বামপক্ষ $=\dfrac{1}{\cos^2\phi}\dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}+\dfrac{2}{\cos\phi\sin\phi}+\dfrac{1}{\sin^2\phi}\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}$

$=\dfrac{\sin^4\phi+2\sin^2\phi\cos^2\phi+\cos^4\phi}{\cos^3\phi\sin^3\phi}=\dfrac{(\sin^2\phi+\cos^2\phi)^2}{\cos^3\phi\sin^3\phi}$

$=\dfrac{1}{\cos^3\phi\sin^3\phi}=\sec^3\phi\operatorname{cosec}^3\phi$

10 $\dfrac{\cot\theta-\tan\theta}{\cot\theta+\tan\theta}=1-2\sin^2\theta$

11 $\dfrac{\sin A}{\cos A+\sin B}+\dfrac{\sin B}{\cos B-\sin A}$

$=\dfrac{\sin A}{\cos A-\sin B}+\dfrac{\sin B}{\cos B+\sin A}.$

12 $\dfrac{1+\sec^2A\cot^2B}{1+\sec^2C\cot^2B}=\dfrac{1+(\tan A\cos B)^2}{1+(\tan C\cos B)^2}$

[**Hints :** বামপক্ষ $=\dfrac{1+(1+\tan^2A)\cot^2B}{1+(1+\tan^2C)\cot^2B}$

$=\dfrac{1+\cot^2B+\tan^2A\cot^2B}{1+\cot^2B+\tan^2C\cot^2B}\ldots$

এর পর tan ও cotকে $\dfrac{\sin}{\cos}$ ও $\dfrac{\cos}{\sin}$ এ পরিণত কর।]

13. If $x=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$, show that $\frac{1}{x}=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$.

14. If $4\sec^2\alpha-7\tan^2\alpha=3$, prove that $\sin\alpha=\pm\frac{1}{2}$.
[B. H. U. '40]

এখানে $4\sec^2\alpha-7\tan^2\alpha=3$,

বা, $4(1+\tan^2\alpha)-7\tan^2\alpha=3$, বা, $4-3\tan^2\alpha=3$,

বা, $3\tan^2\alpha=1$, $\therefore\ \tan^2\alpha=\frac{1}{3}$,

বা, $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{3}$, বা, $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{3}$, বা, $4\sin^2\alpha=1$,

বা, $\sin^2\alpha=\frac{1}{4}$, $\therefore\ \sin\alpha=\pm\frac{1}{2}$.

15. Given $\sec\theta+\tan\theta=u$, express $\tan\theta$ in terms of u,
$\left[\text{Ans.}\ \tan\theta=\frac{u^2-1}{2u}\right]$ [P. U. '42]

16. If $\tan A+\sin A=a$, and $\tan A-\sin A=b$, then $a^2-b^2=4\sqrt{ab}$.
[B. H. U. '36]

17. If $\tan A=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$,
show that $\sqrt{2}\sin A=\sin\theta-\cos\theta$

18. If $x\sin\alpha-y\cos\alpha=z$, then $x\cos\alpha+y\sin\alpha$
$=\pm\sqrt{x^2+y^2-z^2}$.

[**Hints :** প্রদত্ত সর্তের উভয় পক্ষের বর্গ কর তৎপরে তাহার উভয় পক্ষে [illegible] যোগ কর]

19. If $\tan^2 A=1+2\tan^2 B$,
prove that $2\sin^2 A=1+\sin^2 B$.

20. If $\cos\theta+\sec\theta=2$, find the value of $\cos^n\theta+\sec^n\theta$
এখানে $\cos\theta+\sec\theta=2$,

বা, $\cos\theta+\frac{1}{\cos\theta}=2$, বা, $\cos^2\theta+1=2\cos\theta$,

বা, $\cos^2\theta-2\cos\theta+1=0$, বা, $(\cos\theta-1)^2=0$, $\therefore\ \cos\theta=1$

$\therefore\ \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=1$.

এক্ষণে $\cos^n\theta+\sec^n\theta=(1)^n+(1)^n=2$.

21. If cosec $\alpha+\sin\alpha=2$, show that $\sin^7\alpha+\text{cosec}^7\alpha=2$.
[W. B. S. F. '60]

22. If $y\tan A=x$, find the value of $\dfrac{x\sin A-y\cos A}{x\sin A+y\cos A}$.

$\because\ y\tan A=x,\quad\therefore\ xy\tan A=x^2$ (x দ্বারা গুণ করিয়া)

$$\therefore\ x\tan A=\frac{x^2}{y}.$$

এক্ষণে, $\dfrac{x\sin A-y\cos A}{x\sin A+y\cos A}=\dfrac{x\tan A-y}{x\tan A+y}$

[লব ও হরকে cos A দিয়া ভাগ করিয়া]

$$=\frac{\dfrac{x^2}{y}-y}{\dfrac{x^2}{y}+y}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

23. If $\tan\theta+\cot\theta=2$, find $\sin\theta$, θ being a positive acute angle. [W. B. S. F. '55] $\left[\text{Ans. } \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$

24. If $\tan\theta=2\sin\theta$, where θ is a positive acute angle, find $\cot\theta$. [W. B. S. F. '57] $\left[\text{Ans. } \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$

25. Given $\tan^2\theta=1-e^2$, show that $\sec\theta+\tan^3\theta\ \text{cosec}\theta=(2-e^2)^{\frac{3}{2}}$.
[W. B. S. F. '59]

এখানে $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+1-e^2=2-e^2$,

$$\therefore\ \sec\theta=(2-e^2)^{\frac{1}{2}}$$

$\therefore\ \sec\theta+\tan^3\theta\ \text{cosec}\,\theta=\sec\theta+\tan^2\theta\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}$

$=\sec\theta+\tan^2\theta.\dfrac{1}{\cos\theta}=\sec\theta+\tan^2\theta\sec\theta=\sec\theta(1+\tan^2\theta)$

$$=\sec^3\theta=\left\{(2-e^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^3=(2-e^2)^{\frac{3}{2}}.$$

26. Find α and β in degrees (α and β being positive acute angles), if $\sin(2\alpha-\beta)=1$, and $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$.

[W. B. S F. '59] [Ans. $\alpha=50^\circ, \beta=10^\circ$]

27. If $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\alpha$, prove that $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\theta$.

[W. B. S. F. '60]

$\because \cos^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\alpha, \therefore \dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\dfrac{\tan^2\alpha}{1}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

[$\because \cos^2\theta+\sin^2\theta=1$]

$\because$ Comp. & div. দ্বারা $\dfrac{2\cos^2\theta}{-2\sin^2\theta}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$

বা, $\dfrac{\cos^2\theta}{-\sin^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$, বা, $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

বা, $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\tan^2\theta$.

28. If $6\sin^2\theta-11\sin\theta+4=0$, where θ is a positive acute angle, find θ in degrees. [Ans. 30°]

29. If $\sin^2\theta+\sin^4\theta=1$, prove that $\tan^4\theta-\tan^2\theta=1$.

[W. B. S. F. '59 (C)]

30. If 5 tan A = 4, find the value of $\dfrac{5\sin A-3\cos A}{\sin A+2\cos A}$

[W. B. S. F. '60] [Ans. $\frac{5}{14}$]

31. Solve for θ, where θ is an acute angle :

$$\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$$

যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা পাই $\dfrac{2}{-2\tan\theta}=\dfrac{2\sqrt{3}}{-2}$, বা, $\dfrac{1}{\tan\theta}=\sqrt{3}$,

বা, $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30^\circ$, $\therefore \theta=30^\circ$.

32. Solve $\tan\alpha+\sqrt{3}\cot\alpha=\sqrt{3}+1$ where α is an acute angle. [Ans. $\alpha=60^\circ$ or 45°]

33. The angles of a triangle are in A. P. and the number of degrees in the least is to the number of radians in the greatest as 60 to π. Find the angles in degrees

[W. B. S. F. '60 ; Ans. 30°, 60°, 90°]

34. Assuming the earth to be a sphere of radius 4000 miles determine approximately the difference in latitude (to be expressed in the sexagesimal system) of two places, one of which lies 200 miles due north of the other.

$\left(\frac{1}{\pi} = \cdot 31831\right)$ [W. B. S. F. '56]

[Hints. চাপ $= r\theta$; এখানে চাপ $= 200$ মাইল, $r = 4000$ মাইল। θ নির্ণয় করিতে হইবে। চাপ $= r\theta$ সূত্রে θ কোণটি θ রেডিয়ান।

$$4000 \times \theta = 200, \quad \therefore \quad \theta = \frac{200}{4000} \text{ রেডিয়ান} = \frac{1}{20} \times \frac{180°}{\pi}$$

$$= 9° \times \frac{1}{\pi} = 9° \times \cdot 31831 = 2°51'53{\cdot}244'']$$

35 An arc of 50^g in one circle equals one of 60° in another ; find the radian measure of an angle subtended at the centre of the first circle by an arc equal to the radius of the second. [W. B. S. F. '56]

$50^g = \frac{\pi}{4}$ এবং $60° = \frac{\pi}{3}$

মনে কর, প্রথমটি A-বৃত্ত এবং উহার ব্যাসার্ধ R, দ্বিতীয়টি B-বৃত্ত এবং উহার ব্যাসার্ধ r.

প্রথম বৃত্তে, চাপ $= \frac{\pi}{4}$R এবং দ্বিতীয় বৃত্তে, চাপ $= \frac{\pi}{3}r$,

$$\therefore \quad \frac{\pi}{3}r = \frac{\pi}{4}R. \quad \therefore \quad \frac{r}{R} = \frac{3}{4}.$$

এক্ষণে, প্রথম বৃত্তে চাপের পরিমাণ r হইলে নির্ণেয় কেন্দ্রস্থ কোণের পরিমাণ $= \frac{\text{চাপ}}{R}$ রেডিয়ান $= \frac{r}{R}$ রেডিয়ান $= \frac{3}{4}$ রেডিয়ান।

36. The height of a house subtends a right angle at an opposite window, the top of the house being 60° above a horizontal line through the window ; find the height of the house, taking the breadth of the street to be 30 ft.

[Ans. 40 $\sqrt{3}$ ft.]

37. Two pillars are respectively 180 and 60 feet high. If the angle of elevation of the top of the first from the foot of the second be 60°, what will be the angle of elevation of the top of the second from the foot of the first ?

[Ans. 30°]

38. Show that :—

(*a*) $1+\tan A+\tan^2 A+\tan^3 A=\dfrac{\sin A+\cos A}{\cos^3 A}$

(*b*) $1+\cot A+\cot^2 A+\cot^3 A=\dfrac{\sin A+\cos A}{\sin^3 A}$

(*c*) $\sec^6\theta-\tan^6\theta=1+3\sec^2\theta\tan^2\theta$

(*d*) $\operatorname{cosec}^6\theta-\cot^6\theta=1+3\operatorname{cosec}^2\theta\cot^2\theta$.

39. If $\tan\theta+\cot\theta=2$, show that $\tan^7\theta+\cot^7\theta=2$.

40. If $p\sin\theta+q\cos\theta=r$ and $p\cos\theta-q\sin\theta=s$, then $p^2+q^2=r^2$ [illegible] and [illegible] $=\dfrac{r-q\cos\theta}{s+q\sin\theta}$.

[Geometry]

1. PQRS is a parallelogram ; A and B are two points outside and are such that AB is parallel to PQ ; AP and BQ when produced meet at C and AS and BR when produced meet at D ; show that CD is parallel to PS.

2. O is the in-centre of the △ABC and AO produced meets BC at D. Show that AO : OD = (AB + AC) : BC.

3. In the quadrilateral ABCD, BC = 2AD, and O is a point on the diagonal AC such that CO = 2AO If BO = 2DO, prove that ABCD is a trapezium and O lies on the diagonal BD

4. The adjacent sides of a rectangular land are 20 ft and 8 ft. respectively ; calculate geometrically the side of the square whose area will be equal to that of the rectangular plot.

5. Two circles intersect at A and B. Prove that of the triangles having a straight line drawn through A and intercepted by the circumferences as their base and B as their vertex, the area of the triangle whose base is perpendicular to AB is the maximum.

[চিত্র আঁক] মনে কর PBQ ও XBY ঐরূপ দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ এবং $PQ \perp AB$, $BR \perp XY$ টান, $AB > BR$ হইল এবং AB ও BR যথাক্রমে $\triangle PBQ$ ও $\triangle XBY$-এর উচ্চতা।

∵ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ, ∴ তাহাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত $= AB^2 : BR^2$.

∴ $\triangle PBQ > \triangle XBY$ ·